

# 圆锥曲线小题

1. 已知圆  $C_1: (x+3)^2 + y^2 = 1$  和圆  $C_2: (x-3)^2 + y^2 = 9$ , 动圆  $M$  同时与圆  $C_1$  及圆  $C_2$  相外切, 求动圆圆心  $M$  的轨迹方程.

2. 已知动圆  $M$  和定圆  $C_1: x^2 + (y-3)^2 = 64$  内切, 而和定圆  $C_2: x^2 + (y+3)^2 = 4$  外切. 求动圆圆心  $M$  的轨迹方程.

3. 一个动圆与定圆  $F: (x+2)^2 + y^2 = 1$  相外切, 且与定直线  $l: x=1$  相切, 则此动圆的圆心  $M$  的轨迹方程是 ( )

- A.  $y^2 = 4x$                       B.  $y^2 = -2x$                       C.  $y^2 = -4x$                       D.  $y^2 = -8x$

4. (2013 陕西) 已知动圆过定点  $A(4,0)$ , 且在  $y$  轴上截得的弦  $MN$  的长为 8, 求动圆圆心的轨迹  $C$  的方程.

5. 已知圆  $M: (x+\sqrt{5})^2 + y^2 = 36$ , 定点  $N(\sqrt{5}, 0)$ , 点  $P$  为圆  $M$  上的动点, 点  $Q$  在  $NP$  上, 点  $G$  在线段  $MP$  上, 且满足  $\overline{NP} = 2\overline{NQ}, \overline{GQ} \cdot \overline{NP} = 0$ , 则点  $G$  的轨迹方程是 ( )

- A.  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$                       B.  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{31} = 1$                       C.  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$                       D.  $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{31} = 1$

6. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 双曲线  $x^2 - y^2 = 1$  的渐近线与椭圆  $C$  有四个交点, 以这四个交点为顶点的四边形的面积为 16, 则椭圆  $C$  的方程为\_\_\_\_\_.

7. 若椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  的焦点在  $x$  轴上, 过点  $(1, \frac{1}{2})$  作圆  $x^2 + y^2 = 1$  的切线, 切点分别为  $A, B$ , 直线  $AB$  恰好经过椭圆的右焦点和上顶点, 则椭圆方程是\_\_\_\_\_.

8. 已知椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的右焦点为  $F(3, 0)$ , 过点  $F$  的直线交椭圆  $E$  于  $A, B$  两点. 若  $AB$  的中点坐标为  $(1, -1)$ , 则  $E$  的方程为\_\_\_\_\_.

9. 椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的右焦点为  $F$ , 椭圆  $C$  与  $x$  轴正半轴交于  $A$  点, 与  $y$  轴正半轴交于  $B(0, 2)$ , 且  $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BA} = 4\sqrt{2} + 4$ , 则椭圆  $C$  的方程为\_\_\_\_\_.

10. (2011 年浙江) 已知椭圆  $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  与双曲线  $C_2: x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$  有公共的

焦点,  $C_2$  的一条渐近线与以  $C_1$  的长轴为直径的圆相交于  $A, B$  两点, 若  $C_1$  恰好将线段  $AB$  三等分, 则 ( )

A.  $a^2 = \frac{13}{2}$

B.  $a^2 = 3$

C.  $b^2 = \frac{1}{2}$

D.  $b^2 = 2$

11. (2017 届湖南长沙长郡中学高三上周测) 已知点  $A$ 、 $F$  分别是椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

( $a > b > 0$ ) 的上顶点和左焦点, 若  $AF$  于圆  $O: x^2 + y^2 = 4$  相切于点  $T$ , 且点  $T$  是线段  $AF$  靠近点  $A$  的三等分点, 则椭圆  $C$  的标准方程为\_\_\_\_\_.

12. (2015 天津) 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的一条渐近线过点  $(2, \sqrt{3})$ , 且双

曲线的一个焦点在抛物线  $y^2 = 4\sqrt{7}x$  的准线上, 则双曲线的方程为 ( )

- A.  $\frac{x^2}{21} - \frac{y^2}{28} = 1$       B.  $\frac{x^2}{28} - \frac{y^2}{21} = 1$       C.  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$       D.  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$

13. (2016 天津理) 已知双曲线  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ , 以原点为圆心, 双曲线的实半轴长为

半径长的圆与双曲线的两条渐近线相交于  $A, B, C, D$  四点, 四边形  $ABCD$  的面积为  $2b$ , 则双曲线的方程为 ( )

- A.  $\frac{x^2}{4} - \frac{3y^2}{4} = 1$       B.  $\frac{x^2}{4} - \frac{4y^2}{3} = 1$       C.  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$       D.  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

14. (2016 北京理) 双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的渐近线为正方形  $OABC$  的边  $OA, OC$

所在的直线, 点  $B$  为该双曲线的焦点, 若正方形  $OABC$  的边长为 2, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

15. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的一条渐近线平行于直线  $l: y = 2x + 10$ , 双曲线的一个焦点在直线  $l$  上, 则双曲线的方程为 ( )

- A.  $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$       B.  $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$       C.  $\frac{3x^2}{25} - \frac{3y^2}{100} = 1$       D.  $\frac{3x^2}{100} - \frac{3y^2}{25} = 1$

16. (2015 天津) 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的一个焦点为  $F(2, 0)$ , 且双曲线的渐近线与圆  $(x-2)^2 + y^2 = 3$  相切, 则双曲线的方程为 ( )

- A.  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{13} = 1$       B.  $\frac{x^2}{13} - \frac{y^2}{9} = 1$       C.  $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$       D.  $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

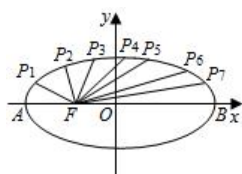
17. (2016 年新课标 1) 已知方程  $\frac{x^2}{m^2+n} - \frac{y^2}{3m^2-n} = 1$  表示双曲线, 且该双曲线两焦点间的距离为 4, 则  $n$  的取值范围是 ( )

- A.  $(-1, 3)$       B.  $(-1, \sqrt{3})$       C.  $(0, 3)$       D.  $(0, \sqrt{3})$

18. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点为  $F_1, F_2$ , 离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ , 过  $F_2$  的直线  $l$  交椭圆  $C$  于  $A, B$  两点, 若  $\triangle AF_1B$  的周长为  $4\sqrt{3}$ , 则椭圆  $C$  的方程为\_\_\_\_\_.

19. 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的两个焦点为  $F_1, F_2$ , 以  $F_1F_2$  为边作正三角形, 若椭圆恰好平分正三角形的另外两条边, 且  $|F_1F_2| = 4$ , 则  $a$  等于\_\_\_\_\_.

20. (2006 四川) 如图, 把椭圆  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$  的长轴  $AB$  分成 8 等份, 过每个分点作  $x$  轴的垂线交椭圆的上半部分于  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$  七个点,  $F$  是椭圆的一个焦点, 则  $|P_7P_2| + |P_6P_2| + |P_5P_2| + |P_4P_2| + |P_3P_2| + |P_2P_2| + |P_1P_2| =$ \_\_\_\_\_.



21. (2014 辽宁) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ , 点  $M$  与  $C$  的焦点不重合, 若  $M$  关于  $C$  的焦点的对称点分别为  $A, B$ , 线段  $MN$  的中点在  $C$  上, 则  $|AN| + |BN| =$  \_\_\_\_\_.

22. (2016 届湖北华中师大一附中五月适应性考试文) 已知五个数  $2, a, m, b, 8$  构成一个等比数列, 则圆锥曲线  $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{2} = 1$  的离心率为 ( )

- A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       B.  $\sqrt{3}$                       C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  或  $\sqrt{3}$                       D.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  或  $\frac{\sqrt{6}}{2}$

23. 椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  上一点  $A$  关于原点的对称点为  $B$ ,  $F$  为其左焦点, 若  $AF \perp BF$ , 设  $\angle ABF = \frac{\pi}{6}$ , 则该椭圆的离心率为 ( )

- A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       B.  $\sqrt{3} - 1$                       C.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$                       D.  $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

24. 椭圆  $F: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 焦距为  $2c$ , 若直线  $y = \sqrt{3}(x + c)$  与椭圆  $F$  的一个交点  $M$  满足  $\angle MF_1F_2 = 2\angle MF_2F_1$ , 则该椭圆的离心率等于 \_\_\_\_\_.

25. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左焦点为  $F$ ,  $C$  与过原点的直线相交于  $A, B$  两点, 连接  $AF, BF$ , 若  $|AB| = 10, |AF| = 6, \cos \angle ABF = \frac{4}{5}$ , 则  $C$  的离心率  $e =$  \_\_\_\_\_.

26. 从椭圆的短轴的一个端点看长轴的两个端点的视角为  $120^\circ$ ，那么此椭圆的离心率为\_\_\_\_\_.

27. 已知椭圆  $C$  的上、下顶点分别为  $B_1$ 、 $B_2$ ，左、右焦点分别为  $F_1$ 、 $F_2$ ，若四边形  $B_1F_1B_2F_2$  是正方形，则此椭圆的离心率  $e$  等于( )

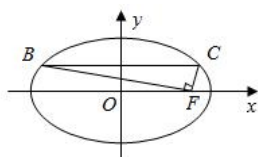
- A.  $\frac{1}{3}$                       B.  $\frac{1}{2}$                       C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

28. 若一个椭圆长轴的长度、短轴的长度和焦距成等差数列，则该椭圆的离心率是\_\_\_\_\_.

29. (2016 年新课标 1 文) 直线  $l$  经过椭圆的一个顶点和一个焦点，若椭圆中心到  $l$  的距离为其短轴长的  $\frac{1}{4}$ ，则该椭圆的离心率为 ( )

- A.  $\frac{1}{3}$                       B.  $\frac{1}{2}$                       C.  $\frac{2}{3}$                       D.  $\frac{3}{4}$

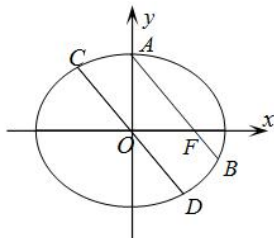
30. (2016 江苏卷) 如图，在平面直角坐标系  $xOy$  中， $F$  是椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的右焦点，直线  $y = \frac{b}{2}$  与椭圆交于  $B, C$  两点，且  $\angle BFC = 90^\circ$ ，则该椭圆的离心率是\_\_\_\_\_.



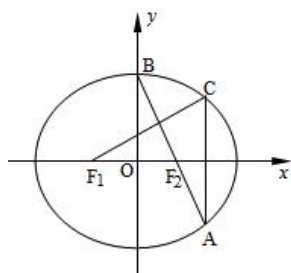
31. (2016 年新课标 3 文) 已知  $O$  为坐标原点， $F$  是椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左焦点， $A, B$  分别为  $C$  的左、右顶点.  $P$  为  $C$  上一点，且  $PF \perp x$  轴，过点  $A$  的直线  $l$  与线段  $PF$  交于点  $M$ ，与  $y$  轴交于点  $E$ ，若直线  $BM$  经过  $OE$  的中点，则  $C$  的离心率为 ( )

- A.  $\frac{1}{3}$                       B.  $\frac{1}{2}$                       C.  $\frac{2}{3}$                       D.  $\frac{3}{4}$

32. 如图, 点  $A, F$  分别是椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的上顶点和右焦点, 直线  $AF$  与椭圆交于另一点  $B$ , 过中心  $O$  作直线  $AF$  的平行线交椭圆于  $C, D$  两点, 若  $\frac{CD}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ , 则椭圆的离心率为\_\_\_\_\_.



33. (2014 江苏) 如图在平面直角坐标系  $xOy$  中,  $F_1, F_2$  分别是椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左右焦点, 顶点  $B$  的坐标是  $(0, b)$ , 连接  $BF_2$  并延长交椭圆于点  $A$ , 过点  $A$  作  $x$  轴的垂线交椭圆于另一点  $C$ , 连接  $F_1C$ , 若  $F_1C \perp AB$ , 则椭圆的离心率为\_\_\_\_\_.

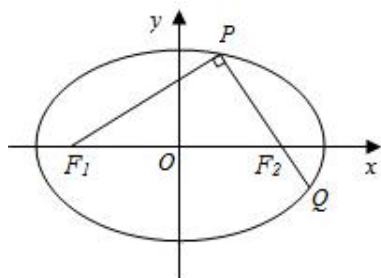


34. (2015 浙江) 椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的右焦点  $F(c, 0)$  关于直线  $y = \frac{b}{c}x$  的对称点  $Q$  在椭圆上, 则椭圆的离心率是\_\_\_\_\_.

35. 已知点  $F$  和直线  $l$  分别是椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的右焦点和右准线, 过点  $F$  作斜率为  $\sqrt{2}$  的直线, 该直线与  $l$  交于点  $A$ , 与椭圆的一个交点是  $B$ , 且  $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FB}$ , 则椭圆的离心率  $e =$  \_\_\_\_\_.

36. (2014 安徽) 设  $F_1, F_2$  分别是椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点, 过点  $F_1$  的直线交椭圆  $E$  于  $A, B$  两点,  $|AF_1| = 3|BF_1|$ , 若  $\cos \angle AF_2B = \frac{3}{5}$ , 求椭圆  $E$  的离心率.

37. (2015 重庆理) 如题图, 椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 过  $F_2$  的直线交椭圆于  $P, Q$  两点, 且  $PQ \perp PF_1$ ; 若  $|PF_1| = |PQ|$ , 求椭圆的离心率  $e$ .





38. 已知  $F_1, F_2$  是椭圆的两个焦点, 椭圆上存在一点  $P$ , 使  $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$ , 则椭圆离心率  $e$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

39. 已知  $F_1, F_2$  是椭圆的两个焦点, 满足  $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = 0$  的点总在椭圆内部, 则椭圆离心率  $e$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

40. 若  $A, B$  为椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的长轴两端点,  $Q$  为椭圆上一点, 使  $\angle AQB = 120^\circ$ , 则椭圆离心率的最小值为\_\_\_\_\_.

41. 已知  $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$  为椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的两个焦点,  $P$  为椭圆上一点且  $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = c^2$ , 则此椭圆离心率的取值范围是\_\_\_\_\_.

42. 椭圆  $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左, 右焦点分别为  $F_1, F_2$ ,  $P$  为椭圆  $M$  上任一点, 且  $|PF_1| \cdot |PF_2|$  的最大值的取值范围是  $[2c^2, 3c^2]$ , 其中  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ , 则椭圆  $M$  的离心率  $e$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

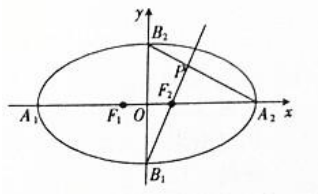
43. 椭圆  $C$  的两个焦点分别是  $F_1, F_2$ , 若  $C$  上的点  $P$  满足  $|PF_1| = 2|PF_2|$ , 则椭圆  $C$  的离心率  $e$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

44. 已知椭圆  $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  与圆  $C_2: x^2 + y^2 = b^2$ , 若在椭圆  $C_1$  上存在点  $P$ ,

使得由点  $P$  所作的圆  $C_2$  的两条切线互相垂直, 则椭圆  $C_1$  的离心率的取值范围是 ( )

- A.  $[\frac{1}{2}, 1)$       B.  $[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$       C.  $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$       D.  $[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$

45. (2017 届三省高三上学期百校大联考理) 如图, 椭圆的中心在坐标原点, 焦点在  $x$  轴上,  $A_1, A_2, B_1, B_2$  为椭圆的顶点,  $F_2$  为右焦点, 延长  $B_1F_2$  与  $A_2B_2$  交于点  $P$ , 若  $\angle B_1PB_2$  为钝角, 则该椭圆的离心率的取值范围是 ( )



- A.  $(\frac{\sqrt{5}-2}{2}, 1)$       B.  $(0, \frac{\sqrt{5}-2}{2})$       C.  $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2})$       D.  $(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1)$

46. (2015 福建) 已知椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的右焦点为  $F$ , 短轴的一个端点为  $M$ ,

直线  $l: 3x - 4y = 0$  交椭圆  $E$  于  $A, B$  两点, 若  $|AF| + |BF| = 4$ , 点  $M$  到直线  $l$  的距离不小于  $\frac{4}{5}$ , 则椭圆  $E$  的离心率的取值范围是 ( )

- A.  $(0, \frac{\sqrt{3}}{2}]$       B.  $(0, \frac{3}{4}]$       C.  $[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$       D.  $[\frac{3}{4}, 1)$

47. (2012 四川文) 椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{5} = 1 (a$  为定值, 且  $a > \sqrt{5})$  的左焦点为  $F$ , 直线  $x = m$  与

椭圆相交于点  $A, B$ ,  $\triangle FAB$  的周长的最大值是 12, 则该椭圆的离心率是\_\_\_\_\_.

48. (2013 北京文) 双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{m} = 1$  的离心率大于  $\sqrt{2}$  的充分必要条件是 ( )

- A.  $m > \frac{1}{2}$                       B.  $m \geq 1$                       C.  $m > 1$                       D.  $m > 2$

49. 双曲线  $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$  与抛物线  $x^2 = 8y$  有一个公共焦点  $F$ , 双曲线上过点  $F$  且垂直实轴的弦长为  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ , 则双曲线的离心率等于\_\_\_\_\_.

50. 已知  $F_1, F_2$  是椭圆  $C_1: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  与双曲线  $C_2$  的公共焦点,  $A, B$  分别是  $C_1, C_2$  在第二、

四象限的公共点, 若四边形  $AF_1BF_2$  为矩形, 则  $C_2$  的双曲线的离心率等于\_\_\_\_\_.

51. 双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的左、右焦点分别是  $F_1, F_2$ , 过  $F_1$  作倾斜角为  $30^\circ$

的直线交双曲线右支于  $M$  点, 若  $MF_2$  垂直于  $x$  轴, 则双曲线的离心率为 ( )

- A.  $\sqrt{6}$                       B.  $\sqrt{3}$                       C.  $\sqrt{2}$                       D.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

52. (2016 新课标 2 理) 已知  $F_1, F_2$  是双曲线  $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的左、右焦点, 点  $M$  在  $E$  上,

$MF_1$  与  $x$  轴垂直,  $\sin \angle MF_2F_1 = \frac{1}{3}$ , 则  $E$  的离心率为 ( )

- A.  $\sqrt{2}$                       B.  $\frac{3}{2}$                       C.  $\sqrt{3}$                       D. 2

53. 点  $P$  是双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  上一点,  $F$  是右焦点, 且  $\triangle OPF$  是  $\angle OFP = 120^\circ$  的等腰三角形 ( $O$  为坐标原点), 则双曲线的离心率是\_\_\_\_\_.

54. (2013 年湖南) 设  $F_1, F_2$  是双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的两个焦点,  $P$  是  $C$  上一点, 若  $|PF_1| + |PF_2| = 6a$ , 且  $\triangle PF_1F_2$  的最小内角为  $30^\circ$ , 则  $C$  的离心率为\_\_\_\_\_.

55. 设双曲线的一个焦点为  $F$ ; 虚轴的一个端点为  $B$ , 如果直线  $FB$  与该双曲线的一条渐近线垂直, 那么此双曲线的离心率为( )

- A.  $\sqrt{2}$                       B.  $\sqrt{3}$                       C.  $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$                       D.  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

56. (2015 山东) 过双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的右焦点作一条与其渐近线平行的直线, 交  $C$  于点  $P$ , 若点  $P$  的横坐标为  $2a$ , 则  $C$  的离心率为\_\_\_\_\_.

57. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的右焦点为  $F(2,0)$ , 设  $A, B$  为双曲线上关于原点对称的两点,  $AF$  的中点为  $M$ ,  $BF$  的中点为  $N$ , 若原点  $O$  在以线段  $MN$  为直径的圆上, 若直线  $AB$  斜率为  $\frac{3\sqrt{7}}{7}$ , 则双曲线的离心率为\_\_\_\_\_.

58. (2015 湖南) 设  $F$  是双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的一个焦点, 若  $C$  上存在点  $P$ , 使线段  $PF$  的中点恰为其虚轴的一个端点, 则  $C$  的离心率为\_\_\_\_\_.

59. 设  $F_1, F_2$  分别为双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点，双曲线上存在一点  $P$

使得  $|PF_1| + |PF_2| = 3b, |PF_1| \cdot |PF_2| = \frac{9}{4}ab$ ，则该双曲线的离心率为 ( )

- A.  $\frac{4}{3}$                                   B.  $\frac{5}{3}$                                   C.  $\frac{9}{4}$                                   D. 3

60. (2015 新课标 2) 已知 A, B 为双曲线 E 的左、右顶点，点 M 在 E 上， $\triangle ABM$  为等腰三角形，且顶角为  $120^\circ$ ，则 E 的离心率为 ( )

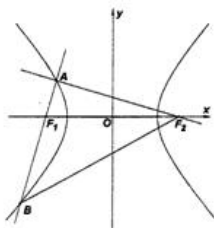
- A.  $\sqrt{5}$                                   B. 2                                  C.  $\sqrt{3}$                                   D.  $\sqrt{2}$

61. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ ，过点  $F_1$  作直线  $l \perp x$  轴交双曲线  $C$  的渐近线于点  $A, B$ 。若以  $AB$  为直径的圆恰过点  $F_2$ ，则该双曲线的离心率为 ( )

- A.  $\sqrt{2}$                                   B.  $\sqrt{3}$                                   C. 2                                  D.  $\sqrt{5}$

62. (2015 山东) 平面直角坐标系  $xoy$  中，双曲线  $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的渐近线与抛物线  $C_2: x^2 = 2py (p > 0)$  交于点  $O, A, B$ ，若  $\triangle OAB$  的垂心为  $C_2$  的焦点，则  $C_1$  的离心率为\_\_\_\_\_。

63. 如图，过双曲线上左支一点  $A$  作两条相互垂直的直线分别过两焦点，其中一条与双曲线交于点  $B$ ，若三角形  $ABF_2$  是等腰直角三角形，则双曲线的离心率为 ( )



- A.  $\sqrt{5+2\sqrt{2}}$                                   B.  $\sqrt{5-2\sqrt{2}}$                                   C.  $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$                                   D.  $\sqrt{4-2\sqrt{2}}$

64. 过双曲线  $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左焦点  $F_1$  作圆  $C_2: x^2 + y^2 = a^2$  的切线, 设切点为  $M$ , 延长  $F_1M$  交抛物线  $C_3: y^2 = 2px (p > 0)$  于点  $N$ , 其中  $C_1, C_3$  有一个共同的焦点, 若  $|MF_1| = |MN|$ , 则双曲线  $C_1$  的离心率为 ( )

- A.  $\sqrt{5} - 1$                       B.  $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$                       C.  $\sqrt{5}$                       D.  $\sqrt{5} + 1$

65. (2011 重庆) 设双曲线的左准线与两条渐近线交于  $A, B$  两点, 左焦点为在以  $AB$  为直径的圆内, 则该双曲线的离心率的取值范围为 ( )

- A.  $(0, \sqrt{2})$                       B.  $(1, \sqrt{2})$                       C.  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$                       D.  $(\sqrt{2}, +\infty)$

66. 若双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的渐近线与圆  $(x - 2)^2 + y^2 = 1$  相离, 则其离心率  $e$  的取值范围是 ( )

- A.  $e > 1$                       B.  $e > \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$                       C.  $e > \frac{2\sqrt{3}}{3}$                       D.  $e > \frac{\sqrt{5}}{2}$

67. 已知  $F_1, F_2$  分别是双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点, 过点  $F_1$  且垂直于  $x$  轴的直线与双曲线交于  $A, B$  两点, 若  $\triangle ABF_2$  是钝角三角形, 则该双曲线离心率的取值范围是 ( )

- A.  $(\sqrt{2} - 1, +\infty)$                       B.  $(1 + \sqrt{2}, +\infty)$                       C.  $(1, 1 + \sqrt{2})$                       D.  $(\sqrt{3} + 1, +\infty)$

68. (2016 浙江理) 已知椭圆  $C_1: \frac{x^2}{m^2} + y^2 = 1 (m > 1)$  与双曲线  $C_2: \frac{x^2}{n^2} - y^2 = 1 (n > 0)$  的焦点重合,  $e_1, e_2$  分别为  $C_1, C_2$  的离心率, 则 ( )

- A.  $m > n$  且  $e_1 e_2 > 1$                       B.  $m > n$  且  $e_1 e_2 < 1$   
 C.  $m < n$  且  $e_1 e_2 > 1$                       D.  $m < n$  且  $e_1 e_2 < 1$

69. (2015 湖北) 将离心率为  $e_1$  的双曲线  $C_1$  的实半轴长  $a$  和虚半轴长  $b$  ( $a \neq b$ ) 同时增加  $m$  ( $m > 0$ ) 个单位长度, 得到离心率为  $e_2$  的双曲线  $C_2$ , 则 ( )

- A. 对任意的  $a, b$ ,  $e_1 > e_2$
- B. 当  $a > b$  时,  $e_1 > e_2$ ; 当  $a < b$  时,  $e_1 < e_2$
- C. 对任意的  $a, b$ ,  $e_1 < e_2$
- D. 当  $a > b$  时,  $e_1 < e_2$ ; 当  $a < b$  时,  $e_1 > e_2$

70. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$  ( $a > 0$ ) 的实轴长、虚轴长、焦距长成等差数列, 则双曲线的渐近线方程为 ( )

- A.  $y = \pm \frac{3}{5}x$
- B.  $y = \pm \frac{5}{3}x$
- C.  $y = \pm \frac{3}{4}x$
- D.  $y = \pm \frac{4}{3}x$

71. 已知双曲线  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的右焦点与抛物线  $y^2 = 12x$  的焦点重合, 则该双曲线的焦点到其渐近线的距离等于 ( )

- A.  $\sqrt{5}$
- B.  $4\sqrt{2}$
- C. 3
- D. 5

72. (2015 重庆) 设双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的右焦点是  $F$ , 左、右顶点分别是  $A_1, A_2$ , 过  $F$  做  $A_1, A_2$  的垂线与双曲线交于  $B, C$  两点, 若  $A_1B \perp A_2C$ , 则双曲线的渐近线的斜率为 ( )

- A.  $\pm \frac{1}{2}$
- B.  $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$
- C.  $\pm 1$
- D.  $\pm \sqrt{2}$

73. (2010 浙江卷) 设  $F_1, F_2$  分别为双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的左、右焦点. 若在双曲线右支上存在点  $P$ , 满足  $|PF_2| = |F_1F_2|$ , 且  $F_2$  到直线  $PF_1$  的距离等于双曲线的实轴长, 则该双曲线的渐近线方程为 ( )

- A.  $3x \pm 4y = 0$
- B.  $3x \pm 5y = 0$
- C.  $4x \pm 3y = 0$
- D.  $5x \pm 4y = 0$

74. (2014 年山东卷) 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的焦距为  $2c$ , 右顶点为  $A$ , 抛物线  $x^2 = 2py$  ( $p > 0$ ) 的焦点为  $F$ , 若双曲线截抛物线的准线所得线段长为  $2c$ , 且  $|FA| = c$ , 则双曲线的渐近线方程为\_\_\_\_\_.

75. 设  $O$  为坐标原点,  $F_1, F_2$  是双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的焦点, 若在双曲线上存在点  $P$ , 满足  $\angle F_1PF_2 = 60^\circ, |OP| = \sqrt{7}a$ , 则该双曲线的渐近线方程为 ( )

- A.  $x \pm \sqrt{3}y = 0$       B.  $\sqrt{3}x \pm y = 0$       C.  $x \pm \sqrt{2}y = 0$       D.  $\sqrt{2}x \pm y = 0$

76. (2015 重庆) 设双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的右焦点为  $F$ , 右顶点为  $A$ , 过  $F$  作  $AF$  的垂线与双曲线交于  $B, C$  两点, 过  $B, C$  分别作  $AC, AB$  的垂线交于点  $D$ , 若  $D$  到直线  $BC$  的距离小于  $a + \sqrt{a^2 + b^2}$ , 则该双曲线的渐近线斜率的取值范围是 ( )

- A.  $(-1, 0) \cup (0, 1)$       B.  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$   
 C.  $(-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$       D.  $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

77. 已知双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$  的左顶点为  $A_1$ , 右焦点为  $F_2$ ,  $P$  为双曲线右支上一点, 则  $\overrightarrow{PA_1} \cdot \overrightarrow{PF_2}$  的最小值为\_\_\_\_\_.

78. 若点  $O$  和点  $F(-2, 0)$  分别是双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$  ( $a > 0$ ) 的中心和左焦点, 点  $P$  为双曲线右支上的任意一点, 则  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{FP}$  的取值范围为 ( )

- A.  $[3 - 2\sqrt{3}, +\infty)$       B.  $[3 + 2\sqrt{3}, +\infty)$       C.  $[-\frac{7}{4}, +\infty)$       D.  $[\frac{7}{4}, +\infty)$



79. (2015 新课标 1) 已知  $M(x_0, y_0)$  是双曲线  $C: \frac{x^2}{2} - y^2 = 1$  上的一点,  $F_1, F_2$  是  $C$  上的两个焦点, 若  $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} < 0$ , 则  $y_0$  的取值范围是 ( )

A.  $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$

B.  $(-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6})$

C.  $(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3})$

D.  $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$

80. (2015 四川) 过双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$  的右焦点且与  $x$  轴垂直的直线交该双曲线的两条渐近线于  $A, B$  两点, 则  $|AB| =$  ( )

A.  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

B.  $2\sqrt{3}$

C. 6

D.  $4\sqrt{3}$

81. (2016 年浙江卷) 设双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 若点  $P$  在双曲线上,

且  $\triangle F_1PF_2$  为锐角三角形, 则  $|PF_1| + |PF_2|$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

82. (2015 新课标 1) 已知  $F$  是双曲线  $C: x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$  的右焦点,  $P$  是  $C$  左支上一点,

$A(0, 6\sqrt{6})$ , 当  $\triangle APF$  周长最小时, 该三角形的面积为\_\_\_\_\_.

83. 设抛物线  $y^2 = 8x$  上一点  $P$  到  $y$  轴的距离是 4, 则点  $P$  到该抛物线焦点的距离是( )

A. 4

B. 6

C. 8

D. 12

84. (2015 上海) 抛物线  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 上的动点  $Q$  到焦点的距离的最小值为 1, 则  $p =$  \_\_\_\_\_.

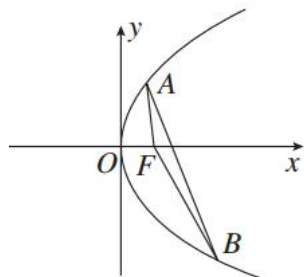
85. (2010 年浙江卷) 设抛物线  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 的焦点为  $F$ , 点  $A(0, 2)$ . 若线段  $FA$  的中点  $B$  在抛物线上, 则  $B$  到该抛物线准线的距离为 \_\_\_\_\_.

86. 若点  $A$  的坐标为  $(3, 2)$ ,  $F$  为抛物线  $y^2 = 2x$  的焦点, 点  $P$  是抛物线上的一动点, 则  $|PA| + |PF|$  取得最小值时, 点  $P$  的坐标是 \_\_\_\_\_.

87. 设  $F$  为抛物线  $y^2 = 4x$  的焦点,  $A, B, C$  为该抛物线上三点, 若  $\vec{FA} + \vec{FB} + \vec{FC} = \vec{0}$ , 则  $|\vec{FA}| + |\vec{FB}| + |\vec{FC}| =$  ( )

- A. 9                                      B. 6                                      C. 4                                      D. 3

88. 已知抛物线  $y^2 = 4x$  的弦  $AB$  的中点的横坐标为 2, 则  $|AB|$  的最大值为 \_\_\_\_\_.



89. 已知点  $M$  是抛物线  $y^2 = 4x$  上的一点,  $F$  为抛物线的焦点,  $A$  在圆  $C: (x-4)^2 + (y-1)^2 = 1$  上, 则  $|MA| + |MF|$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

90. 已知直线  $l_1: 4x - 3y + 6 = 0$  和直线  $l_2: x = -1$ , 抛物线  $y^2 = 4x$  上一动点  $P$  到直线  $l_1$  和直线  $l_2$  的距离之和的最小值是( )

- A. 2                                      B. 3                                      C.  $\frac{11}{5}$                                       D.  $\frac{37}{16}$

91. 已知抛物线方程为  $y^2 = 4x$ , 直线  $l$  的方程为  $x - y + 5 = 0$ , 在抛物线上有一动点  $P$  到  $y$  轴的距离为  $d_1$ , 到直线  $l$  的距离为  $d_2$ , 则  $d_1 + d_2$  的最小值为\_\_\_\_\_.

92. (2016 年新课标 2) 设  $F$  为抛物线  $C: y^2 = 4x$  的焦点, 曲线  $y = \frac{k}{x} (k > 0)$  与  $C$  交于点  $P$ ,  $PF \perp x$  轴, 则  $k =$  ( )

- A.  $\frac{1}{2}$                                       B. 1                                      C.  $\frac{3}{2}$                                       D. 2

93. (2016 年新课标 1) 以抛物线  $C$  的顶点为圆心的圆交  $C$  于  $A, B$  两点, 交  $C$  的准线于  $D, E$  两点, 已知  $|AB| = 4\sqrt{2}, |DE| = 2\sqrt{5}$ , 则  $C$  的焦点到准线的距离为 ( )

- A. 2                                      B. 4                                      C. 6                                      D. 8

94. 直线  $y = x - 3$  与抛物线  $y^2 = 4x$  交于  $A, B$  两点, 过  $A, B$  两点向抛物线的准线作垂线, 垂足分别为  $P, Q$ , 则梯形  $APQB$  的面积为( )

- A. 48                                      B. 56                                      C. 64                                      D. 72

95. 已知抛物线的顶点在原点, 焦点在  $x$  轴的正半轴上, 若抛物线的准线与双曲线  $5x^2 - y^2 = 20$  的两条渐近线围成的三角形的面积等于  $4\sqrt{5}$ , 则抛物线的方程为\_\_\_\_\_.

96. (2012 山东卷) 已知双曲线  $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的离心率为 2, 若抛物线

$C_2: x^2 = 2py (p > 0)$  的焦点到双曲线  $C_1$  的渐近线的距离为 2, 则抛物线  $C_2$  的方程为 ( )

- A.  $x^2 = \frac{8\sqrt{3}}{3}y$                                       B.  $x^2 = \frac{16\sqrt{3}}{3}y$                                       C.  $x^2 = 8y$                                       D.  $x^2 = 16y$

97. (2016 届湖北七市教研协作体高三 4 月联考试数学(理))过抛物线  $y^2 = 2px(p > 0)$  的

焦点  $F$  的直线与双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$  的一条渐近线平行, 并交抛物线于  $A, B$  两点, 若

$|AF| > |BF|$ , 且  $|AF| = 2$ , 则抛物线的方程为 ( )

- A.  $y^2 = 2x$                       B.  $y^2 = 3x$                       C.  $y^2 = 4x$                       D.  $y^2 = x$

98. (2017 届湖北黄石市高三 9 月调研数学(理))过抛物线  $y^2 = 4x$  的焦点  $F$  的直线  $l$  与抛

物线交于  $A, B$  两点, 若  $A, B$  两点的横坐标之和为  $\frac{10}{3}$ , 则  $|AB| =$  ( )

- A.  $\frac{13}{3}$                                   B.  $\frac{14}{3}$                                   C. 5                                      D.  $\frac{16}{3}$

99. 抛物线  $x^2 = 2py(p > 0)$  的焦点为  $F$ , 其准线与双曲线  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1$  相交于  $A, B$  两点,

若  $\triangle ABF$  为等边三角形, 则  $p =$  \_\_\_\_\_.

100. 已知点  $M$  是抛物线  $y^2 = 2px(p > 0)$  上的一点,  $F$  为抛物线的焦点, 若以  $|MF|$  为直径作圆, 则这个圆与  $y$  轴的关系是( )

- A. 相交                                      B. 相切  
C. 相离                                      D. 以上三种情形都有可能

101. 已知抛物线  $y^2 = 2px(p > 0)$ ,  $F$  为抛物线的焦点, 直线  $AB$  过焦点, 若以  $|AB|$  为直径作圆, 则这个圆与抛物线准线的关系是( )

- A. 相交                                      B. 相离  
C. 相切                                      D. 以上三种情形都有可能

102. 设抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点为  $F$ ，点  $M$  在  $C$  上， $|MF| = 5$ ，若以  $MF$  为直径的圆过点  $(0, 2)$ ，则  $C$  的方程为 ( )

- A.  $y^2 = 4x$  或  $y^2 = 8x$                       B.  $y^2 = 2x$  或  $y^2 = 8x$   
 C.  $y^2 = 4x$  或  $y^2 = 16x$                       D.  $y^2 = 2x$  或  $y^2 = 16x$

103. (2013 年山东卷) 抛物线  $C_1: y = \frac{1}{2p} x^2 (p > 0)$  的焦点与双曲线  $C_2: \frac{x^2}{3} - y^2 = 1$  的右焦点的连线交  $C_1$  于第一象限的点  $M$ ，若  $C_1$  在点  $M$  处的切线平行于  $C_2$  的一条渐近线，则  $p =$  ( )

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{16}$                       B.  $\frac{\sqrt{3}}{8}$                       C.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$                       D.  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

104. 已知  $F$  是抛物线  $y^2 = x$  的焦点，点  $A$ ， $B$  在该抛物线上且位于  $x$  轴的两侧，

$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 2$  (其中  $O$  为坐标原点)，则  $\triangle ABO$  与  $\triangle AFO$  面积之和的最小值是 ( )

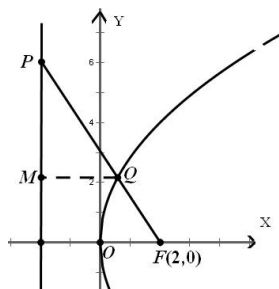
- A. 2                      B. 3                      C.  $\frac{17\sqrt{2}}{8}$                       D.  $\sqrt{10}$

105. 过抛物线  $y^2 = 4x$  的顶点  $O$  引两条相互垂直的动弦  $OA$  和  $OB$ ，则三角形  $OAB$  面积的最小值为\_\_\_\_\_.

106. (2016 年四川理) 设  $O$  为坐标原点， $P$  是以  $F$  为焦点的抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  上任意一点， $M$  是线段  $PF$  上的点，且  $|PM| = 2|MF|$ ，则直线  $OM$  的斜率的最大值为 ( )

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$                       B.  $\frac{2}{3}$                       C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       D. 1

107. 已知抛物线  $C: y^2 = 8x$  的焦点为  $F$ ，准线为  $l$ ， $P$  是  $l$  上一点， $Q$  是直线  $PF$  与  $C$  的一个交点，若  $\overrightarrow{FP} = 4\overrightarrow{FQ}$ ，则  $|QF| =$  ( )

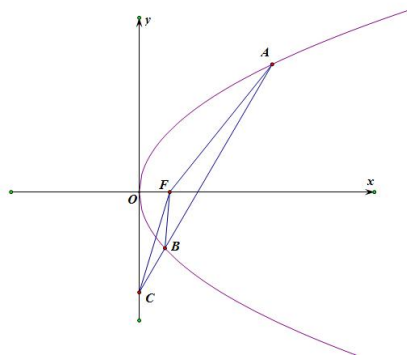


- A.  $\frac{7}{2}$                                   B.  $\frac{5}{2}$                                   C. 3                                  D. 2

108. (2014 新课标 1) 已知抛物线  $C: y^2 = x$  的焦点为  $F$ ， $A(x_0, y_0)$  是  $C$  上一点， $|AF| = \frac{5}{4}x_0$ ，则  $x_0 =$  ( )

- A. 1                                  B. 2                                  C. 4                                  D. 8

109. (2015 浙江) 如图，设抛物线  $y^2 = 4x$  的焦点为  $F$ ，不经过焦点的直线上有三个不同的点  $A, B, C$ ，其中点  $A, B$  在抛物线上，点  $C$  在  $y$  轴上，则  $\triangle BCF$  与  $\triangle ACF$  的面积之比是 ( )



- A.  $\frac{|BF|-1}{|AF|-1}$                                   B.  $\frac{|BF|^2-1}{|AF|^2-1}$                                   C.  $\frac{|BF|+1}{|AF|+1}$                                   D.  $\frac{|BF|^2+1}{|AF|^2+1}$

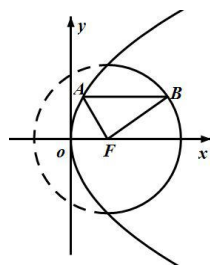
110. (2011年湖南理) 已知抛物线  $C: y^2 = 4x$  的焦点为  $F$ , 直线  $y = 2x - 4$  与  $C$  交于  $A, B$  两点, 则  $\cos \angle AFB =$  ( )

- A.  $\frac{4}{5}$                       B.  $\frac{3}{5}$                       C.  $-\frac{3}{5}$                       D.  $-\frac{4}{5}$

111. 抛物线  $y^2 = 4x$  的焦点为  $F$ , 点  $A, B$  在抛物线上, 且  $\angle AFB = 120^\circ$ , 弦  $AB$  中点  $M$

在其准线上的射影为  $N$ , 则  $\frac{|MN|}{|AB|}$  的最大值为\_\_\_\_\_.

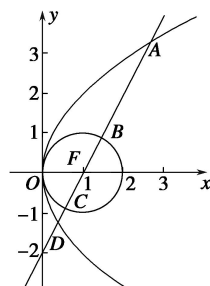
112. 如图所示点  $F$  是抛物线  $y^2 = 8x$  的焦点, 点  $A, B$  分别在抛物线  $y^2 = 8x$  及圆  $(x-2)^2 + y^2 = 16$  的实线部分上运动, 且  $AB$  总是平行于  $x$  轴, 则  $\triangle FAB$  的周长的取值范围是 ( )



- A. (6,10)                      B. (8,12)                      C. [6,8]                      D. [8,12]

113. 已知抛物线  $y^2 = 4x$ , 圆  $F: (x-1)^2 + y^2 = 1$ , 过点  $F$  作直线  $l$ , 自上而下依次与上述

两曲线交于点  $A, B, C, D$  (如图所示), 则  $|AB| \cdot |CD| =$  ( )



- A. 等于 1                      B. 最小值是 1                      C. 等于 4                      D. 最大值是 4

114. (2015 四川) 设直线  $l$  与抛物线  $y^2 = 4x$  相交于  $A, B$  两点, 与圆  $(x-5)^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$  相切于点  $M$ , 且  $M$  为线段  $AB$  的中点, 若这样的直线  $l$  恰有 4 条, 则  $r$  的取值范围是 ( )

- A. (1, 3)                      B. (1, 4)                      C. (2, 3)                      D. (2, 4)

115. (2014 福建卷) 设  $P, Q$  分别为  $x^2 + (y-6)^2 = 2$  和椭圆  $\frac{x^2}{10} + y^2 = 1$  上的点, 则  $P, Q$  两点间的最大距离是 ( )

- A.  $5\sqrt{2}$                       B.  $\sqrt{46} + \sqrt{2}$                       C.  $7 + \sqrt{2}$                       D.  $6\sqrt{2}$

116. 设  $P$  是椭圆  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  上一点,  $M, N$  分别是圆  $(x+4)^2 + y^2 = 1$  和  $(x-4)^2 + y^2 = 1$  上的点, 则  $|PM| + |PN|$  的最小值、最大值分别为 ( )

- A. 9, 12                      B. 8, 11                      C. 8, 12                      D. 10, 12

117. 已知动点  $P(x, y)$  在椭圆  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$  上, 若  $A$  点坐标为  $(3, 0)$ ,  $|\overrightarrow{AM}| = 1$ , 且  $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ , 则  $|\overrightarrow{PM}|$  的最小值为\_\_\_\_\_.

118. (2016 届安徽省江南十校高三二模理科数学试卷) 已知点  $M, N$  是抛物线  $y = 4x^2$  上不同的两点,  $F$  为抛物线的焦点, 且满足  $\angle MFN = 135^\circ$ , 弦  $MN$  的中点  $P$  到直线  $l: y = -\frac{1}{16}$  的距离记为  $d$ , 若  $|MN|^2 = \lambda \cdot d^2$ , 则  $\lambda$  的最小值为 ( )

- A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       B.  $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$                       C.  $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$                       D.  $2 + \sqrt{2}$



# 圆锥曲线综合

1. (2014 陕西文) 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  经过点  $(0, \sqrt{3})$ , 离心率为  $\frac{1}{2}$ , 左右焦点分别为  $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ .

(1) 求椭圆的方程;

(2) 若直线  $l: y = -\frac{1}{2}x + m$  与椭圆交于  $A, B$  两点, 与以  $F_1F_2$  为直径的圆交于  $C, D$  两点,

且满足  $\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$ , 求直线  $l$  的方程.

2. (2016 陕西二模) 设  $O$  是坐标原点, 椭圆  $C: x^2 + 3y^2 = 6$  的左右焦点分别为  $F_1, F_2$ ,

且  $P, Q$  是椭圆  $C$  上不同的两点,

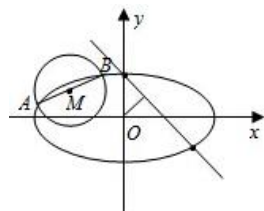
(1) 若直线  $PQ$  过椭圆  $C$  的右焦点  $F_2$ , 且倾斜角为  $30^\circ$ , 求证:  $|F_1P|, |PQ|, |QF_1|$  成等差数列;

(2) 若  $P, Q$  两点使得直线  $OP, PQ, QO$  的斜率均存在, 且成等比数列, 求直线  $PQ$  的斜率.

3. (2015 陕西理) 已知椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的半焦距为  $c$ , 原点  $O$  到经过两点  $(c, 0), (0, b)$  的直线的距离为  $\frac{1}{2}c$ .

(1) 求椭圆  $E$  的离心率;

(2) 如图,  $AB$  是圆  $M: (x+2)^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{2}$  的一条直径, 若椭圆  $E$  经过  $A, B$  两点, 求椭圆  $E$  的方程.



4. (2013 新课标 1) 已知圆  $M:(x+1)^2 + y^2 = 1$ , 圆  $N:(x-1)^2 + y^2 = 9$ , 动圆  $P$  与圆  $M$  外切并与圆  $N$  内切, 圆心  $P$  的轨迹为曲线  $C$ .

(1) 求  $C$  的方程;

(2)  $l$  是与圆  $P$ , 圆  $M$  都相切的一条直线,  $l$  与曲线  $C$  交于  $A, B$  两点, 当圆  $P$  的半径最长时, 求  $|AB|$ .

5. 已知点  $P, Q$  的坐标分别为  $(-2, 0)$ ,  $(2, 0)$ , 直线  $PM, QM$  相交于点  $M$ , 且它们的斜率之积是  $-\frac{1}{4}$ .

(1) 求点  $M$  的轨迹方程;

(2) 过点  $O$  作两条互相垂直的射线, 与点  $M$  的轨迹交于  $A, B$  两点. 试判断点  $O$  到直线  $AB$  的距离是否为定值, 若是请求出这个定值, 若不是请说明理由.

6. (2011 新课标) 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知点  $A(0, -1)$ ,  $B$  点在直线  $y = -3$  上,  $M$

点满足  $\overrightarrow{MB} \parallel \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{BA}$ ,  $M$  点的轨迹为曲线  $C$ .

(1) 求  $C$  的方程;

(2)  $P$  为  $C$  上的动点,  $l$  为  $C$  在  $P$  点处得切线, 求  $O$  点到  $l$  距离的最小值.

7. 设椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 点  $P(a, b)$  满足  $|PF_2| = |F_1F_2|$ .

(1) 求椭圆的离心率  $e$ ;

(2) 设直线  $PF_2$  与椭圆相交于  $A, B$  两点, 若直线  $PF_2$  与圆  $(x+1)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 16$  相交于  $M, N$  两点, 且  $|MN| = \frac{5}{8}|AB|$ , 求椭圆的方程.

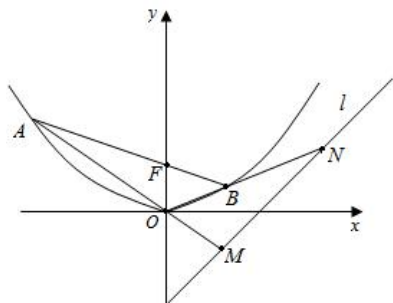
8. 已知椭圆  $x^2 + 2y^2 = 2$  的上顶点为  $B$ , 右焦点为  $F$ , 是否存在直线  $l$  与椭圆交于两点  $P, Q$ , 且  $F$  为  $\triangle BPQ$  的重心.

9. (2013 浙江) 已知抛物线  $C$  的顶点为  $O(0,0)$ , 焦点  $F(0,1)$ .

(1) 求抛物线  $C$  的方程;

(2) 过  $F$  作直线交抛物线于  $A, B$  两点, 若直线  $OA, OB$  分别交直线  $l: y = x - 2$  于  $M, N$  两

点, 求  $|MN|$  的最小值.



10. (2011 北京) 已知椭圆  $G: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ , 过点  $(m, 0)$  作圆  $x^2 + y^2 = 1$  的切线  $l$  交椭圆  $G$

于  $A, B$  两点.

- (1) 求椭圆  $G$  的焦点坐标和离心率;
- (2) 将  $|AB|$  表示为  $m$  的函数, 并求  $|AB|$  的最大值.

11. (2014 四川) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的焦距为 4, 其短轴的两个端点与长

轴的一个端点构成正三角形.

- (1) 求椭圆  $C$  的标准方程;
- (2) 设  $F$  为椭圆  $C$  的左焦点,  $T$  为直线  $x = -3$  上任意一点, 过  $F$  作  $TF$  的垂线交椭圆  $C$  于点  $P, Q$ .

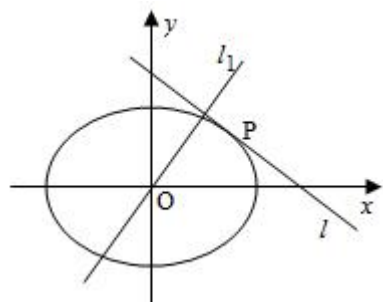
(i) 证明:  $OT$  平分线段  $PQ$  (其中  $O$  为坐标原点);

(ii) 当  $\frac{|TF|}{|PQ|}$  最小时, 求点  $T$  的坐标.

12. (2014 浙江) 如图, 设椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ , 动直线  $l$  与椭圆  $C$  只有一个公共

点  $P$ , 且点  $P$  在第一象限.

- (1) 已知直线  $l$  的斜率为  $k$ , 用  $a, b, k$  表示点  $P$  的坐标;
- (2) 若过原点  $O$  的直线  $l_1$  与  $l$  垂直, 证明: 点  $P$  到直线  $l_1$  的距离的最大值为  $a - b$ .



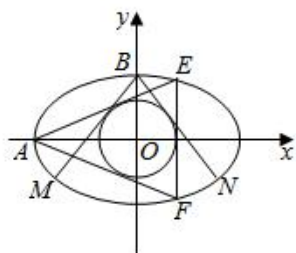
13. (2016 镇江一模) 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心

率  $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 左顶点为  $A(-3, 0)$ , 圆心在原点的圆  $O$  与椭圆的内接三角形  $AEF$  的三边都相切.

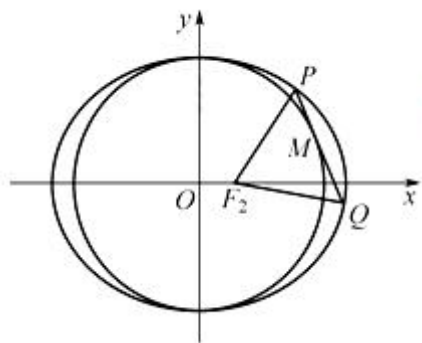
切.

(1) 求椭圆与圆  $O$  的方程;

(2)  $B$  为椭圆的上顶点, 过  $B$  作圆  $O$  的两条切线, 分别交椭圆于  $M, N$  两点, 试判断直线  $MN$  与圆  $O$  的位置关系.



14. 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的右焦点为  $F_2(1, 0)$ , 点  $H(3, 0)$  在椭圆上.

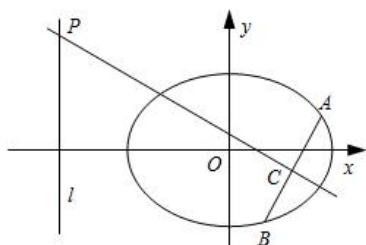


(1) 求椭圆的方程;

(2) 点  $M$  在圆  $x^2 + y^2 = b^2$  上, 且  $M$  在第一象限, 过  $M$  作圆  $x^2 + y^2 = b^2$  的切线交椭圆

于  $P, Q$  两点, 求证:  $\triangle PF_2Q$  的周长是定值.

15. (2015 江苏) 如图, 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 且右焦点  $F$  到直线  $l: x = -\frac{a^2}{c}$  的距离为 3.



- (1) 求椭圆的标准方程;
- (2) 过  $F$  的直线与椭圆交于  $A, B$  两点, 线段  $AB$  的垂直平分线分别交直  $l$  和  $AB$  于点  $P, C$ , 若  $PC = 2AB$ , 求直线  $AB$  的方程.

16. (2015 天津) 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的上顶点为  $B$ , 左焦点  $F$ , 离心率为  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ,

- (1) 求直线  $BF$  的斜率;
- (2) 设直线  $BF$  与椭圆交于点  $P$  ( $P$  异于点  $B$ ), 过点  $B$  且垂直于  $BP$  的直线与椭圆交于点  $Q$  ( $Q$  异于点  $B$ ) 直线  $PQ$  与  $y$  轴交于点  $M$ ,  $|PM| = \lambda |MQ|$ .

(i) 求  $\lambda$  的值;

(ii) 若  $|PM| \sin \angle BQP = \frac{7\sqrt{5}}{9}$ , 求椭圆的方程.

17. (2016 新课标 2) 已知椭圆  $E: \frac{x^2}{t} + \frac{y^2}{3} = 1$  的焦点在  $x$  轴上,  $A$  是  $E$  的左顶点, 斜率为

$k(k > 0)$  的直线交  $E$  于  $A, M$  两点, 点  $N$  在  $E$  上,  $MA \perp NA$ .

(1) 当  $t = 4$ ,  $|AM| = |AN|$  时, 求  $\triangle AMN$  的面积;

(2) 当  $2|AM| = |AN|$  时, 求  $k$  的取值范围.

18. (2016 四川理) 已知椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的两个焦点与短轴的一个端点是直

角三角形的三个顶点, 直线  $l: y = -x + 3$  与椭圆  $E$  有且只有一个公共点  $T$ .

(1) 求椭圆  $E$  的方程及点  $T$  的坐标;

(2) 设  $O$  是坐标原点, 直线  $l'$  平行于  $OT$ , 与椭圆  $E$  交于不同的两点  $A, B$ , 且与直线  $l$  交于点  $P$ , 证明: 存在常数  $\lambda$ , 使得  $|PT|^2 = \lambda |PA| \cdot |PB|$ , 并求  $\lambda$  的值.

19. (重庆市第八中学 2017 届高三上学期适应性月考三) 已知椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 1)$  中,  $a = \sqrt{2}b$ , 且椭圆  $E$  上任一点到点  $P(-\frac{1}{2}, 0)$  的最小距离为  $\frac{\sqrt{7}}{2}$ .

(1) 求椭圆  $E$  的标准方程;

(2) 如图 4, 过点  $Q(1, 1)$  作两条倾斜角互补的直线  $l_1, l_2$  ( $l_1, l_2$  不重合) 分别交椭圆  $E$  于点  $A$ ,

$C, B, D$ , 求证:  $|QA| \cdot |QC| = |QB| \cdot |QD|$ .

20. (湖南省长沙市 2017 届高三 12 月联考数学 (文)) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{3}{5}$ , 过左焦点  $F$  且垂直于长轴的弦长为  $\frac{32}{5}$ .

(1) 求椭圆  $C$  的标准方程;

(2) 点  $P(m, 0)$  为椭圆  $C$  的长轴上的一个动点, 过点  $P$  且斜率为  $\frac{4}{5}$  的直线  $l$  交椭圆  $C$  于  $A, B$  两点, 证明:  $|PA|^2 + |PB|^2$  为定值.



21. (2014 北京) 已知椭圆  $C: x^2 + 2y^2 = 4$ .

(1) 求椭圆  $C$  的离心率;

(2) 设  $O$  为原点, 若点  $A$  在直线  $y = 2$  上, 点  $B$  在椭圆  $C$  上, 且  $OA \perp OB$ .

(文) 求线段  $AB$  长度的最小值.

(理) 判断直线  $AB$  与圆  $x^2 + y^2 = 2$  的位置关系.

22. (2016 北京) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $A(a, 0)$ ,  $B(0, b)$ ,

$O(0, 0)$ ,  $\Delta OAB$  的面积为 1.

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 设  $P$  是椭圆  $C$  上一点, 直线  $PA$  与  $y$  轴交于点  $M$ , 直线  $PB$  与  $x$  轴交于点  $N$ ,

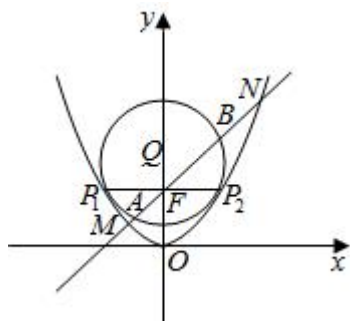
求证:  $|AN| \cdot |BM|$  为定值.

23. (2016 四川) 已知椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的一个焦点与短轴的两个端点是正三角形的三个顶点, 点  $P(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$  在椭圆  $E$  上.

(1) 求椭圆  $E$  的方程;

(2) 设不过原点  $O$  且斜率为  $\frac{1}{2}$  的直线  $l$  与椭圆  $E$  交于不同的两点  $A, B$ , 线段  $AB$  的中点为  $M$ , 直线  $OM$  与椭圆  $E$  交于  $C, D$ , 证明:  $|MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD|$ .

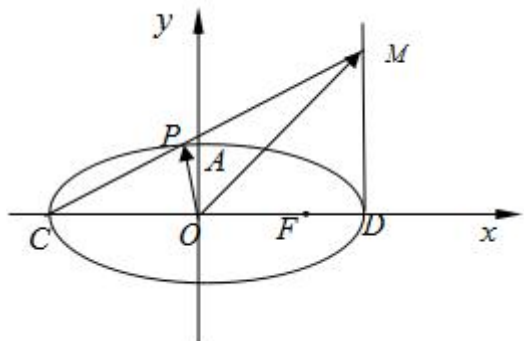
24. (2016 江西重点中学协作) 如图, 抛物线  $C: x^2 = 2py$  ( $p > 0$ ) 的焦点为  $F(0, 1)$ , 取垂直于  $y$  轴的直线交抛物线于不同的两点  $P_1, P_2$ , 过  $P_1, P_2$  作圆心为  $Q$  的圆, 使抛物线上其余点均在圆外, 且  $P_1Q \perp P_2Q$ .



(1) 求抛物线  $C$  和圆  $Q$  的方程;

(2) 过点  $F$  作直线  $l$  与抛物线  $C$  和圆  $Q$  依次交于  $M, A, B, N$ , 求  $|MN| \cdot |AB|$  的最小值.

25. 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的右焦点为  $F$ ,  $A$  为短轴的一个端点, 且  $|OA| = |OF|$ ,  $\triangle AOF$  的面积为 1 (其中  $O$  为坐标原点).



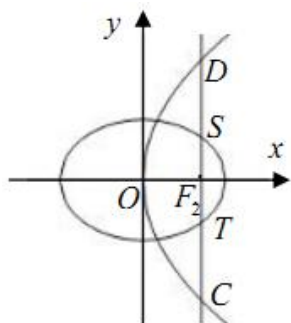
- (1) 求椭圆的方程;  
 (2) 若  $C, D$  分别是椭圆长轴的左、右端点, 动点  $M$  满足  $MD \perp CD$ , 连接  $CM$ , 交椭圆于点  $P$ , 证明:  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP}$  为定值.

26. 设椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的焦点  $F_1, F_2$ , 过右焦点  $F_2$  的直线  $l$  与  $C$  相交于  $P, Q$

两点, 若  $\triangle PQF_1$  的周长为短轴长的  $2\sqrt{3}$  倍.

- (1) 求  $C$  的离心率;  
 (2) 设  $l$  的斜率为 1, 在  $C$  上是否存在一点  $M$ , 使得  $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ ? 若存在, 求出点  $M$  的坐标; 若不存在, 说明理由.

27. 如图, 椭圆的右焦点  $F_2$  与抛物线  $y^2 = 4x$  的焦点重合, 过  $F_2$  且于  $x$  轴垂直的直线与椭圆交于  $S, T$ , 与抛物线交于  $C, D$  两点, 且  $|CD| = 2\sqrt{2}|ST|$ .



(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 设  $P$  为椭圆上一点, 若过点  $M(2,0)$  的直线  $l$  与椭圆相交于不同两点  $A$  和  $B$ , 且满足

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = t\overrightarrow{OP} \quad (O \text{ 为坐标原点}), \text{ 求实数 } t \text{ 的取值范围.}$$

28. 椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 且离心率为  $\frac{1}{2}$ , 点  $P$  为椭圆

上一动点,  $\Delta F_1PF_2$  面积的最大值为  $\sqrt{3}$ .

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设椭圆的左顶点为  $A_1$ , 过右焦点  $F_2$  的直线  $l$  与椭圆相交于  $A, B$  两点, 连结  $A_1A, A_1B$

并延长交直线  $x=4$  分别于  $P, Q$  两点, 问  $\overrightarrow{PF_2} \cdot \overrightarrow{QF_2}$  是否为定值? 若是, 求出此定值; 若不是, 请说明理由.

29. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 过顶点  $A(0,1)$  的直线  $l$  与椭圆  $C$

相交于两点  $A, B$ .

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 若点  $M$  在椭圆上且满足  $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OB}$ , 求直线  $l$  的斜率  $k$  的值.

30. 椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 短半轴长为 2.

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 若过点  $M(2,0)$  斜率为  $k$  的直线与椭圆  $C$  相交于两点  $G, H$ , 设  $P$  为椭圆  $C$  上一点,

且满足  $\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OH} = t\overrightarrow{OP}$  ( $O$  为坐标原点), 当  $|\overrightarrow{PG} - \overrightarrow{PH}| < \frac{2\sqrt{5}}{3}$  时, 求实数  $t$  的取值范围.

31. 已知  $O$  是坐标原点, 若椭圆  $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 右顶点为  $P$ ,

上顶点为  $Q$ ,  $\triangle OPQ$  的面积为  $2\sqrt{2}$ .

(1) 求椭圆  $\Gamma$  的标准方程;

(2) 已知点  $E(\sqrt{6}, 0)$ ,  $M, N$  为椭圆  $\Gamma$  上两动点, 若有  $\overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{EN} = -2$ , 证明: 直线  $MN$  恒过定点.

32. 设椭圆  $E$  的方程为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ , 点  $O$  为坐标原点, 点  $A$  的坐标为  $(a, 0)$ ,

点  $B$  的坐标为  $(0, b)$ , 点  $M$  在线段  $AB$  上, 满足  $|BM| = 2|MA|$ , 直线  $OM$  的斜率为  $\frac{\sqrt{5}}{10}$ .

(1) 求  $E$  的离心率  $e$ ;

(2) 设点  $C$  的坐标为  $(0, -b)$ ,  $N$  为线段  $AC$  的中点, 点  $N$  关于直线  $AB$  的对称点的纵坐标为  $\frac{7}{2}$ , 求  $E$  的方程.

33. 设椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左焦点为  $F$ , 离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ , 过点  $F$  且与  $x$  轴垂直的

直线被椭圆截得的线段长为  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ .

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设  $A, B$  分别为椭圆的左, 右顶点, 过点  $F$  且斜率为  $k$  的直线与椭圆交于  $C, D$  两点. 若  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = 8$ , 求  $k$  的值.

34. 已知点  $(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$  在椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  上, 椭圆离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 过椭圆  $C$  右焦点  $F$  的直线  $l$  与椭圆交于两点  $A, B$ , 在  $x$  轴上是否存在点  $M$ , 使得  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$  为定值? 若存在, 求出点  $M$  的坐标, 若不存在, 请说明理由.

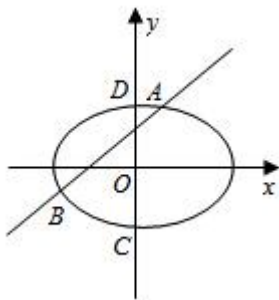
35. (2015 四川文) 如图, 椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率是  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 点  $(0,1)$  在短轴

$CD$  上, 且  $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD} = -1$ .

(1) 求椭圆  $E$  的方程;

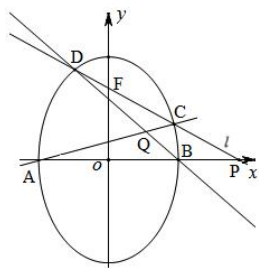
(2) 设  $O$  为坐标原点, 过点  $P$  的动直线与椭圆交于  $A, B$  两点, 是否存在常数  $\lambda$ , 使得

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \lambda \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$  为定值? 若存在, 求  $\lambda$  的值, 若不存在, 请说明理由.



36. (2011 四川理) 椭圆有两顶点  $A(-1,0), B(1,0)$ , 过其焦点  $F(0,1)$  的直线  $l$  与椭圆交于  $C, D$

两点, 并与  $x$  轴交于点  $P$ , 直线  $AC$  与直线  $BD$  交于点  $Q$ .



(1) 当  $|CD| = \frac{3}{2}\sqrt{2}$  时, 求直线  $l$  的方程;

(2) 当点  $P$  异于  $A, B$  两点时, 求证:  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$  为定值.



37. 已知过抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点，斜率为  $2\sqrt{2}$  的直线交抛物线于  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) (x_1 < x_2)$ ，两点，且  $|AB| = 18$ .

(1) 求该抛物线的方程；

(2)  $O$  为坐标原点， $C$  为抛物线上一点，若  $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}$ ，求  $\lambda$  的值.

38. (2012 陕西) 已知椭圆  $C_1: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ，椭圆  $C_2$  以  $C_1$  的长轴为短轴，且与  $C_1$  有相同的离心率.

(1) 求椭圆  $C_2$  的方程；

(2) 设  $O$  为坐标原点，点  $A, B$  分别在椭圆  $C_1$  和  $C_2$  上， $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA}$ ，求直线  $AB$  的方程.

39. (2006 山东) 双曲线  $C$  与椭圆  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$  有相同的焦点, 直线  $y = \sqrt{3}x$  为  $C$  的一条渐近线.

(1) 求双曲线  $C$  的方程;

(2) 过点  $P(0, 4)$  的直线  $l$ , 交双曲线  $C$  于  $A, B$  两点, 交  $x$  轴于  $Q$  点 ( $Q$  点与  $C$  的顶不重合), 当  $\overrightarrow{PQ} = \lambda_1 \overrightarrow{QA} = \lambda_2 \overrightarrow{QB}$ , 且  $\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{8}{3}$  时, 求  $Q$  点的坐标.

40. 已知椭圆  $C$  的中心在原点, 焦点在  $x$  轴上, 它的一个顶点恰好是抛物线  $x^2 = 4y$  的焦点,

离心率等于  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 过椭圆  $C$  的右焦点  $F$  作直线  $l$  交椭圆  $C$  于  $A, B$  两点, 交  $y$  轴于  $M$  点, 若

$\overrightarrow{MA} = \lambda_1 \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{MB} = \lambda_2 \overrightarrow{BF}$ , 求证  $\lambda_1 + \lambda_2$  为定值.

41. (2005 年全国 1) 已知椭圆的中心为坐标原点  $O$ , 焦点在  $x$  轴上, 斜率为 1 且过椭圆右焦点  $F$  的直线交椭圆于  $A$ 、 $B$  两点,  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$  与  $\vec{a} = (3, -1)$  共线.

(1) 求椭圆的离心率;

(2) 设  $M$  为椭圆上任意一点, 且  $\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$  ( $\lambda, \mu \in R$ ), 证明  $\lambda^2 + \mu^2$  为定值.

42. 已知动圆  $P$  ( $P$  为圆心) 经过点  $N(\sqrt{3}, 0)$ , 并且与圆  $M: (x + \sqrt{3})^2 + y^2 = 16$  相切.

(1) 求点  $P$  的轨迹  $E$  的方程;

(2) 经过点  $A(0, 2)$  的直线  $l$  与曲线  $E$  相交于点  $C, D$ , 并且  $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AD}$ , 求直线  $l$  的方程.

43. (2010 辽宁理) 设椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左焦点为  $F$ , 过点  $F$  的直线  $l$  与椭圆  $C$  相交于  $A, B$  两点, 直线  $l$  的倾斜角为  $60^\circ$ ,  $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FB}$ .

(1) 求椭圆  $C$  的离心率;

(2) 如果  $|AB| = \frac{15}{4}$ , 求椭圆  $C$  的方程.

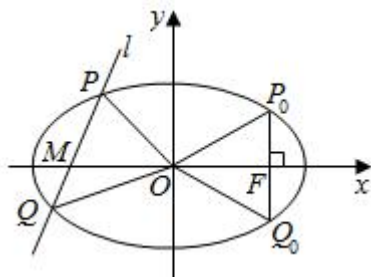
44. (2016 重庆一模) 如图,  $F$  是椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的右焦点,  $O$  是坐标原点,

$|OF| = \sqrt{5}$ , 过  $F$  做  $OF$  的垂线交椭圆于  $P_0, Q_0$  两点,  $\Delta OP_0Q_0$  的面积为  $\frac{4\sqrt{5}}{3}$ .

(1) 求该椭圆的标准方程;

(2) 若过点  $M(-\sqrt{5}, 0)$  的直线  $l$  与椭圆上、下部分别交于点  $P, Q$ , 且  $|PM| = 2|MQ|$ ,

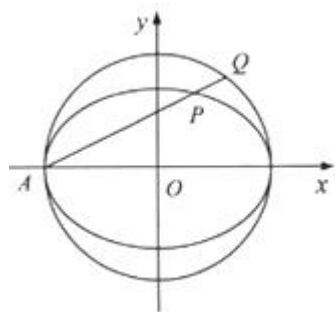
求直线  $l$  的方程.



45. (2016 南通市三次调)如图,在平面直角坐标系  $xOy$  中,已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$

的离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 长轴长为 4, 过椭圆的左顶点  $A$  作直线  $l$ , 分别交椭圆和圆  $x^2 + y^2 = a^2$  于

相异两点  $P, Q$ .



(1) 若直线  $l$  的斜率为  $\frac{1}{2}$ , 求  $\frac{AP}{AQ}$  的值;

(2) 若  $\overline{PQ} = \lambda \overline{AP}$ , 求实数  $\lambda$  的取值范围.

46. (2017 届重庆市第一中学高三上期中数学(理)试卷) 已知椭圆  $C$  :

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 椭圆  $C$  和抛物线  $y^2 = x$  交于  $M, N$  两点, 且直

线  $MN$  恰好通过椭圆  $C$  的右焦点.

(1) 求椭圆  $C$  的标准方程;

(2) 经过椭圆  $C$  右焦点的直线  $l$  和椭圆  $C$  交于  $A, B$  两点, 点  $P$  在椭圆上, 且  $\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{BP}$ , 其中  $O$  为坐标原点, 求直线  $l$  的斜率.

47. (2014 新课标 2) 设  $F_1, F_2$  分别是椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左右焦点,  $M$  是  $C$  上

一点且  $MF_2$  与  $x$  轴垂直, 直线  $MF_1$  与  $C$  的另一个交点为  $N$ .

(1) 若直线  $MN$  的斜率为  $\frac{3}{4}$ , 求  $C$  的离心率;

(2) 若直线  $MN$  在  $y$  轴上的截距为 2, 且  $|MN| = 5|F_1N|$ , 求  $a, b$ .

48. (江苏省扬州市 2017 届高三上学期期中考试) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的

右焦点为  $F$ , 过点  $F$  的直线交  $y$  轴与点  $N$ , 交椭圆  $C$  于点  $A, P$  ( $P$  在第一象限), 过点  $P$

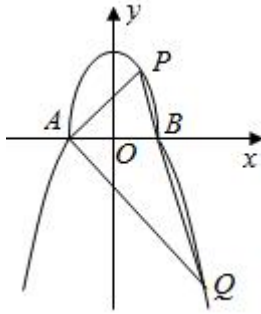
作  $y$  轴的垂线交椭圆  $C$  于另外一点  $Q$ , 若  $\overrightarrow{NF} = 2\overrightarrow{FP}$ .

(1) 设直线  $PF, QF$  的斜率分别为  $k, k'$ , 求证:  $\frac{k}{k'}$  为定值;

(2) 若  $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{FP}$  且  $\Delta APQ$  的面积为  $\frac{12\sqrt{15}}{5}$ , 求椭圆  $C$  的方程.

49. (2014 陕西理) 如图, 曲线  $C$  由上半椭圆  $C_1: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0, y \geq 0)$  和部分抛

物线  $C_2: y = -x^2 + 1 (y \leq 0)$  连接而成,  $C_1, C_2$  的公共点为  $A, B$ , 其中  $C_1$  的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .



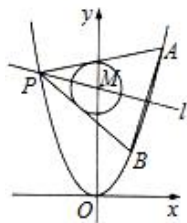
(1) 求  $a, b$  的值;

(2) 过点  $B$  的直线  $l$  与  $C_1, C_2$  分别交于  $P, Q$  (均异于点  $A, B$ ), 若  $AP \perp AQ$ , 求直线  $l$  的方程.

50. (2011 浙江) 已知抛物线  $C_1: x^2 = y$ , 圆  $C_2: x^2 + (y-4)^2 = 1$  的圆心为点  $M$ .

(1) 求点  $M$  到抛物线  $C_1$  的准线的距离;

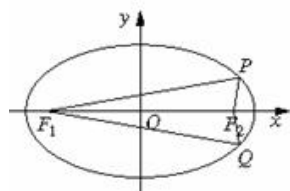
(2) 已知点  $P$  是抛物线  $C_1$  上一点 (异于原点), 过点  $P$  作圆  $C_2$  的两条切线, 交抛物线  $C_1$  于  $A, B$  两点, 若过  $M, P$  两点的直线  $l$  垂直于  $AB$ , 求直线  $l$  的方程.



51. (2017 届江苏苏州市高三暑假自主学习测试) 如图, 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 椭圆

$C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 点  $P(3,1)$  在椭圆上,  $\triangle PF_1F_2$  的

面积为  $2\sqrt{2}$ .



(1) ①求椭圆  $C$  的标准方程;

②若  $\angle F_1QF_2 = \frac{\pi}{3}$ , 求  $QF_1 \cdot QF_2$  的值.

(2) 直线  $y = x + k$  与椭圆  $C$  相交于  $A, B$  两点, 若以  $AB$  为直径的圆经过坐标原点, 求实数  $k$  的值.

52. 设椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ,  $F_1, F_2$  为左右焦点,  $B$  为短轴端点, 且  $S_{\triangle BF_1F_2} = 4$ ,

椭圆  $C$  的离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $O$  为坐标原点.

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 是否存在圆心在原点的圆, 使得该圆的任意一条切线与椭圆  $C$  恒有两个交点  $M, N$ ,

且满足  $|\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}| = |\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}|$ ? 若存在, 求出该圆的方程, 若不存在, 说明理由.



53. (2015 湖南) 已知抛物线  $C_1: x^2 = 4y$  的焦点  $F$  也是椭圆  $C_2: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的一个焦点,  $C_1$  与  $C_2$  的公共弦的长为  $2\sqrt{6}$ .

(1) 求  $C_2$  的方程;

(2) 过点  $F$  的直线  $l$  与  $C_1$  相交于  $A, B$  两点, 与  $C_2$  相交于  $C, D$  两点, 且  $\overrightarrow{AC}$  与  $\overrightarrow{BD}$  同向.

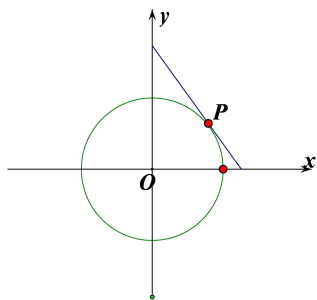
(i) 若  $|AC| = |BD|$ , 求直线  $l$  的斜率;

(ii) 设  $C_1$  在点  $A$  处的切线与  $x$  轴的交点为  $M$ , 证明: 直线  $l$  绕点  $F$  旋转时,  $\triangle MFD$  总是钝角三角形.

54. (2014 辽宁理) 圆  $x^2 + y^2 = 4$  的切线与  $x$  轴正半轴,  $y$  轴正半轴围成一个三角形, 当该三角形面积最小时, 切点为  $P$  (如图), 双曲线  $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  过点  $P$  且离心率为  $\sqrt{3}$ .

(1) 求  $C_1$  的方程;

(2) 椭圆  $C_2$  过点  $P$  且与  $C_1$  有相同的焦点, 直线  $l$  过  $C_2$  的右焦点且与  $C_2$  交于  $A, B$  两点, 若以线段  $AB$  为直径的圆心过点  $P$ , 求  $l$  的方程.



55. 已知椭圆  $C$  的中心在原点  $O$ ，焦点在  $x$  轴上，离心率为  $\frac{1}{2}$ ，右焦点到右顶点的距离为 1.

(1) 求椭圆  $C$  的标准方程;

(2) 是否存在与椭圆  $C$  交于  $A, B$  两点的直线  $l: y = kx + m (k \in R)$ ，使得

$|\overline{OA} + 2\overline{OB}| = |\overline{OA} - 2\overline{OB}|$  成立? 若存在，求出实数  $m$  的取值范围，若不存在，请说明理由.

56. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率是  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，一个顶点是  $B(0, 1)$ .

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 设  $P, Q$  是椭圆  $C$  上异于点  $B$  的任意两点，且  $BP \perp BQ$ ，试问：直线  $PQ$  是否恒过一定点? 若是，求出该定点的坐标; 若不是，说明理由.

57. (2017 重庆市第八中学高三理上第二次适应性考试) 在直角坐标系  $xOy$  中, 点  $P(2,1)$  为

抛物线  $C: y = \frac{x^2}{4}$  上的定点,  $A, B$  为抛物线  $C$  上两个动点.

- (1) 若直线  $PA$  与  $PB$  的倾斜角互补, 证明: 直线  $AB$  的斜率为定值;
- (2) 若  $PA \perp PB$ , 直线  $AB$  是否经过定点? 若是, 求出该定点, 若不是, 说明理由.

58. 已知椭圆  $C$  的中心在坐标原点, 焦点在  $x$  轴上, 左顶点为  $A$ , 左焦点为  $F_1(-2, 0)$ , 点  $B(2, \sqrt{2})$  在椭圆  $C$  上, 直线  $y = kx (k \neq 0)$  与椭圆  $C$  交于  $E, F$  两点, 直线  $AE, AF$  分别与  $y$  轴交于点  $M, N$ .

- (1) 求椭圆  $C$  的方程;
- (2) 以  $MN$  为直径的圆是否经过定点? 若经过, 求出定点的坐标; 若不过, 请说明理由.

59. (厦门一中 2016 届高三(下)第三次周考) 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右

焦点分别为  $F_1, F_2$ , 四个顶点分别为  $A, B, C, D$ , 且四边形  $F_1AF_2B$  是边长为 2 的正方形, 动点  $M$  满足  $MD \perp CD$ , 连接  $CM$ , 交椭圆于点  $P$ .

(1) 求椭圆的方程;

(2) 证明:  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP}$  为定值;

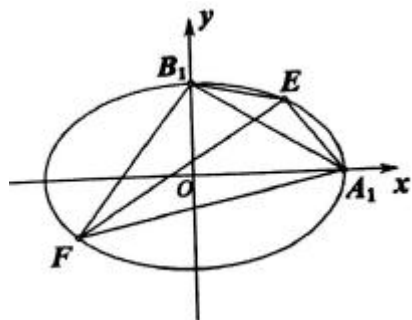
(3) 试问  $x$  轴上是否存在异于点  $C$  的定点  $Q$ , 使得以  $MP$  为直径的圆恒过直线  $DP, MQ$  的交点, 若存在, 求出点  $Q$  的坐标; 若不存在请说明理由.

60. 如图, 椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率是  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 点  $E\left(\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$  在椭圆上, 设点

$A_1, B_1$  分别是椭圆的右顶点和上顶点, 过点  $A_1, B_1$  引椭圆  $C$  的两条弦  $A_1E, B_1F$ .

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 若直线  $A_1E$  与  $B_1F$  的斜率是互为相反数, 直线  $EF$  的斜率是否为定值? 若是求出该定值, 若不是, 说明理由.



61. 已知动圆过定点  $A(4,0)$ ，且在  $y$  轴上截得的弦  $MN$  的长为 8.

(1) 求动圆圆心的轨迹  $C$  的方程;

(2) 已知点  $B(-1,0)$ ，设不垂直于  $x$  轴的直线  $l$  与轨迹  $C$  交于不同的两点  $P, Q$ ，若  $x$  轴是  $\angle PBQ$  的角平分线，证明直线  $l$  过定点.

62. (2016 天津) 设椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1 (a > \sqrt{3})$  的右焦点为  $F$ ，右顶点为  $A$ ，已知

$$\frac{1}{|OF|} + \frac{1}{|OA|} = \frac{3e}{|FA|},$$
 其中  $O$  为原点， $e$  为椭圆的离心率.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设过点  $A$  的直线  $l$  与椭圆交于点  $B$  ( $B$  不在  $x$  轴上)，垂直于  $l$  的直线与  $l$  交于点  $M$ ，与  $y$  轴交于点  $H$ ，若  $BF \perp HF$ ，且  $\angle MOA \leq \angle MAO$ ，求直线  $l$  的斜率的取值范围.

63. 已知直线  $3x + 2y - 4 = 0$  过椭圆  $C$  的顶点, 且椭圆  $C$  的焦点恰好是双曲线  $x^2 - y^2 = 5$  的顶点.

(1) 求椭圆  $C$  的方程.

(2) 已知经过顶点  $M(2,0)$ , 斜率存在且不为 0 的直线  $l$  交椭圆  $C$  与  $A$ 、 $B$  两点, 试问在  $x$  轴上是否存在另一个顶点  $P$ , 使得  $PM$  始终平分  $\angle APB$ , 若存在, 求出点  $P$  的坐标; 若不存在, 请说明理由.

64. (2015 新课标 1 理) 在直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C: y = \frac{x^2}{4}$  与直线  $y = kx + a (a > 0)$  交与  $M, N$  两点.

(1) 当  $k = 0$  时, 分别求  $C$  在点  $M$  和  $N$  处的切线方程;

(2)  $y$  轴上是否存在点  $P$ , 使得当  $k$  变动时, 总有  $\angle OPM = \angle OPN$ ? 说明理由.

65. (2015 北京理) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 点  $P(0, 1)$  和点  $A(m, n) (m \neq 0)$  都在椭圆  $C$  上, 直线  $PA$  交  $x$  轴于点  $M$ .

(1) 求椭圆  $C$  的方程, 并求点  $M$  的坐标 (用  $m, n$  表示);

(2) 设  $O$  为原点, 点  $B$  与点  $A$  关于  $x$  轴对称, 直线  $PB$  交  $x$  轴于点  $N$ . 问:  $y$  轴上是否存在点  $Q$ , 使得  $\angle OQM = \angle ONQ$ ? 若存在, 求点  $Q$  的坐标; 若不存在, 说明理由.

66. (2016 新课标 3) 已知抛物线  $C: y^2 = 2x$  的焦点为  $F$ , 平行于  $x$  轴的两条直线  $l_1, l_2$  分别交  $C$  于  $A, B$  两点, 交  $C$  的准线于  $P, Q$  两点.

(1) 若  $F$  在线段  $AB$  上,  $R$  是  $PQ$  的中点, 证明  $AR \parallel FQ$ ;

(2) 若  $\triangle PQF$  的面积是  $\triangle ABF$  的面积的两倍, 求  $AB$  中点的轨迹方程.

67. 已知抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  过点  $A(1, m)$ ,  $B$  为抛物线的准线与  $x$  轴的交点, 若  $|AB| = 2\sqrt{2}$ .

(1) 求抛物线的方程;

(2) 在抛物线上任取一点  $P(x_0, y_0)$ , 过点  $P$  作两条直线分别与抛物线另外相交于点  $M$  和点  $N$ , 连接  $MN$ , 若直线  $PM$ ,  $PN$ ,  $MN$  的斜率都存在且不为零, 设其斜率分别为  $k_1$ ,

$k_2, k_3$ , 求证:  $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_3} = \frac{y_0}{2}$ .

68. (2015 北京文) 已知椭圆  $C: x^2 + 3y^2 = 3$ , 过点  $D(1, 0)$  且不过点  $E(2, 1)$  的直线与椭圆  $C$  交于  $A, B$  两点, 直线  $AE$  与直线  $x = 3$  交于点  $M$ .

(1) 求椭圆  $C$  的离心率;

(2) 若  $AB$  垂直于  $x$  轴, 求直线  $BM$  的斜率;

(3) 试判断直线  $BM$  与直线  $DE$  的位置关系, 并说明理由.



69. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ,  $F_1, F_2$  为左右焦点, 下顶点为  $B_1$ , 过  $F_2$  的直线

$l$  交椭圆于  $M, N$  两点, 当直线  $l$  的倾斜角为  $\frac{\pi}{6}$  时,  $F_1 B_1 \perp l$ .

(1) 求椭圆  $C$  的离心率;

(2) 若  $P$  为椭圆上一动点, 直线  $PM, PN$  的斜率记为  $k_{PM}, k_{PN}$ , 且不为零, 当直线  $l$  垂直于  $x$  轴时,  $|\frac{1}{k_{PM}} - \frac{1}{k_{PN}}|$  是否存在最小值? 若存在, 试求出该最小值; 若不存在, 请说明理由.

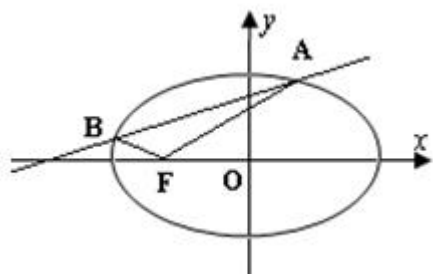
70. (2013 年安徽省江南十校开年第一考) 若焦点分别为  $F_1, F_2$  的椭圆

$C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  过点  $M(2, 1)$ , 抛物线  $y^2 = 4\sqrt{3}x$  的准线过椭圆  $C$  的左焦点.

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 不过  $M$  的动直线  $l$  交椭圆  $C$  于  $A, B$  两点, 若  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ , 求证: 直线  $l$  过定点, 并求出定点坐标.

71. (2017 豫北联考) 已知点  $P$  是椭圆  $C$  上的任一点,  $P$  到直线  $l_1: x = -2$  的距离为  $d_1$ , 到点  $F(-1,0)$  的距离为  $d_2$ , 且  $\frac{d_2}{d_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .



- (1) 求椭圆  $C$  的方程;
- (2) 如图, 直线  $l$  与椭圆  $C$  交于不同的两点  $A, B$  ( $A, B$  都在  $x$  轴上方), 且  $\angle FOA + \angle OFB = 180^\circ$ .
  - (i) 当  $A$  为椭圆  $C$  与  $y$  轴正半轴的交点时, 求直线  $l$  的方程;
  - (ii) 是否存在一个定点, 无论  $\angle OFA$  如何变化, 直线  $l$  总过该定点? 若存在, 求出该定点的坐标; 若不存在, 请说明理由.

72. 已知椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的右焦点为  $F$ , 短轴长为 2, 点  $M$  为椭圆  $E$  上一个动点, 且  $|MF|$  的最大值为  $\sqrt{2} + 1$ .

- (1) 求椭圆  $E$  的方程;
- (2) 若点  $M$  的坐标为  $(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ , 点  $A, B$  为椭圆  $E$  上异于点  $M$  的不同两点, 且直线  $x = 1$  平分  $\angle AMB$ , 求直线  $AB$  的斜率.

73. 已知椭圆  $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的右焦点为  $(2\sqrt{2}, 0)$ , 且椭圆  $\Gamma$  上一点  $M$  到

其两焦点  $F_1, F_2$  的距离之和为  $4\sqrt{3}$ .

(1) 求椭圆  $\Gamma$  的标准方程;

(2) 设直线  $l: y = x + m$  ( $m \in R$ ) 与椭圆  $\Gamma$  交于不同两点  $A, B$ , 且  $|AB| = 3\sqrt{2}$ . 若点

$P(x_0, 2)$  满足  $|\overline{PA}| = |\overline{PB}|$ , 求  $x_0$  的值.

74. 已知为椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 且  $|F_1F_2| = 2\sqrt{2}$ , 长轴的一个端点与短轴两个端点组成等边三角形的三个顶点.

(1) 求椭圆方程;

(2) 设椭圆与直线  $y = kx + m$  相交于不同的两点  $M, N$ , 又点  $A(0, -1)$ , 当  $|AM| = |AN|$  时, 求实数  $m$  的取值范围.

75. (2013 北京) 已知 A、B、C 是椭圆  $W: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  上的三个点, O 是坐标原点.

- (1) 当点 B 是 W 的右顶点, 且四边形 OABC 为菱形时, 求此菱形的面积.
- (2) 当点 B 不是 W 的顶点时, 判断四边形 OABC 是否可能为菱形, 并说明理由.

76. (2015 新课标 2) 已知椭圆  $C: 9x^2 + y^2 = m^2 (m > 0)$ , 直线  $l$  不过原点  $O$  且不平行于坐标轴,  $l$  与  $C$  有两个交点  $A, B$ , 线段  $AB$  的中点为  $M$ .

(1) 证明: 直线  $OM$  的斜率与  $l$  的斜率的乘积为定值;

(2) 若  $l$  过点  $(\frac{m}{3}, m)$ , 延长线段  $OM$  与  $C$  交于点  $P$ , 四边形  $OAPB$  能否为平行四边形?

若能, 求此时  $l$  的斜率, 若不能, 说明理由.

77. (重庆市巴蜀中学 2017 届高三 12 月月考文) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的

两个焦点分别为  $F_1(-2, 0)$ ,  $F_2(2, 0)$ , 离心率为  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ , 过焦点  $F_2$  的直线  $l$  (斜率不为 0) 与

椭圆  $C$  交于  $A, B$  两点, 线段  $AB$  的中点为  $D$ ,  $O$  为坐标原点, 直线  $OD$  交于椭圆  $M, N$  两点.

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 当四边形  $MF_1NF_2$  为矩形时, 求直线  $l$  的方程.

78. 设  $F$  为椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的右焦点, 点  $P(1, \frac{3}{2})$  在椭圆  $E$  上, 直线

$l_0: 3x - 4y - 10 = 0$  与以原点为圆心, 以椭圆  $E$  的长半轴长为半径的圆相切.

(1) 求椭圆  $E$  的方程;

(2) 过点  $F$  的直线  $l$  与椭圆相交于  $A, B$  两点, 过点  $P$  且平行于  $AB$  的直线与椭圆交于另一点  $Q$ , 问是否存在直线  $l$ , 使得四边形  $PABQ$  的对角线互相平分? 若存在, 求出  $l$  的方程, 若不存在, 说明理由.

79. 已知椭圆 $\Omega: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为 $2\sqrt{3}$ ，且经过点 $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 。

(1) 求椭圆 $\Omega$ 的方程；

(2)  $A$ 是椭圆 $\Omega$ 与 $y$ 轴正半轴的交点,椭圆 $\Omega$ 上是否存在两点 $M$ 、 $N$ ，使得 $\triangle AMN$ 是以 $A$ 为直角顶点的等腰直角三角形？若存在，请说明有几个；若不存在，请说明理由。

80. (2012 山东) 已知椭圆 $D: x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < b < 1)$ 的左焦点为 $F$ ，其左右顶点为 $A$ 、

$C$ ，椭圆与 $y$ 轴正半轴的交点为 $B$ ， $\triangle FBC$ 的外接圆的圆心 $P(m, n)$ 在直线 $x + y = 0$ 上。

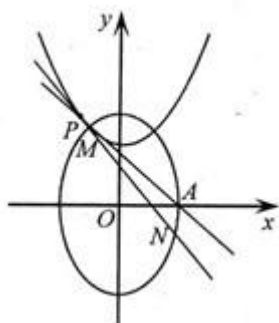
(1) 求椭圆 $D$ 的方程；

(2) 已知直线 $l: x = -\sqrt{2}$ ， $N$ 是椭圆 $D$ 上的动点， $NM \perp l$ ，垂足为 $M$ ，是否存在点 $N$ ，使得 $\triangle FMN$ 为等腰三角形？若存在，求出点 $N$ 的坐标，若不存在，请说明理由。

81. (2009 浙江) 已知椭圆  $C_1: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的右顶点为  $A(1, 0)$ , 过  $C_1$  的焦点且垂直长轴的弦长为 1.

(1) 求椭圆  $C_1$  的方程;

(2) 设点  $P$  在抛物线  $C_2: y = x^2 + h (h \in \mathbf{R})$  上,  $C_2$  在点  $P$  处的切线与  $C_1$  交于点  $M, N$ . 当线段  $AP$  的中点与  $MN$  的中点的横坐标相等时, 求  $h$  的最小值.



82. 平面直角坐标系  $xOy$  中, 过椭圆  $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的右焦点  $F$  作直  $x + y - \sqrt{3} = 0$

交  $M$  于  $A, B$  两点,  $P$  为  $AB$  的中点, 且  $OP$  的斜率为  $\frac{1}{2}$ .

(1) 求  $M$  的方程;

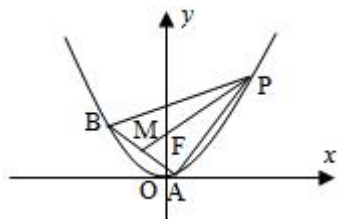
(2)  $C, D$  为  $M$  上的两点, 若四边形  $ABCD$  的对角线  $CD \perp AB$ , 求四边形  $ABCD$  面积的最大值.

83. (2014 浙江文) 已知  $\triangle ABP$  的三个顶点在抛物线  $C: x^2 = 4y$  上,  $F$  为抛物线  $C$  的焦点,

点  $M$  为  $AB$  的中点,  $\overline{PF} = 3\overline{FM}$ .

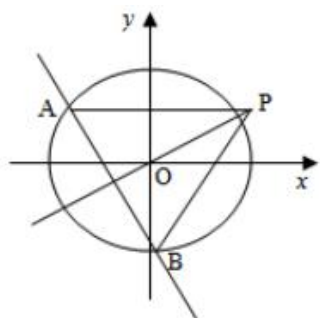
(1) 若  $|PF| = 3$ , 求点  $M$  的坐标;

(2) 求  $\triangle ABP$  面积的最大值.



84. (2013 浙江) 如图, 椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{1}{2}$ , 其左焦点到点  $P(2,1)$

的距离为  $\sqrt{10}$ , 不过原点  $O$  的直线  $l$  与  $C$  相交于  $A, B$  两点, 且线段  $AB$  被直线  $OP$  平分.



(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 求  $\triangle ABP$  的面积取最大时直线  $l$  的方程.



85. (2016 西安交大附中模拟)  $A$  为椭圆  $E: \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{8} = 1$  的左顶点,  $B, C$  在椭圆  $E$  上, 且  $BC$

垂直于  $x$  轴, 设  $\triangle ABC$  的周长为  $l$ .

(1) 若  $\triangle ABC$  为等边三角形, 求  $l$ ;

(2) 当点  $B$  在椭圆上运动时, 求  $l$  的最大值.

86. (2014 新课标 1) 已知点  $A(0, -2)$ , 椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $F$

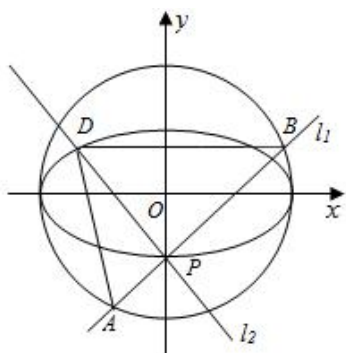
是椭圆  $E$  的右焦点, 直线  $AF$  的斜率为  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ,  $O$  为坐标原点.

(1) 求  $E$  的方程;

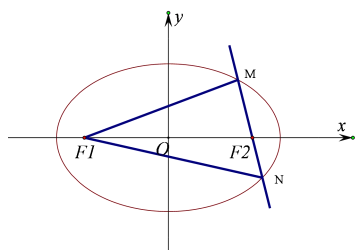
(2) 设过点  $A$  的动直线  $l$  与  $E$  相交于  $P, Q$  两点, 当  $\triangle OPQ$  的面积最大时, 求  $l$  的直线方程.

87. (2013 浙江) 如图, 点  $P(0, -1)$  是椭圆  $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的一个顶点,  $C_1$  的长轴是圆  $C_2: x^2 + y^2 = 4$  的直径,  $l_1, l_2$  是过点  $P$  且互相垂直的两条直线, 其中  $l_1$  交圆  $C_2$  于两点,  $l_2$  交椭圆  $C_1$  于另一点  $D$ .

- (1) 求椭圆  $C_1$  的方程;  
 (2) 求  $\triangle ABD$  面积取最大值时直线  $l_1$  的方程.



88. 已知椭圆的焦点坐标为  $F_1(-1, 0)$ ,  $F_2(1, 0)$ , 过  $F_2$  垂直于长轴的直线交椭圆于  $P, Q$  两点, 且  $|PQ| = 3$ ,



- (1) 求椭圆的方程;  
 (2) 过  $F_2$  的直线  $l$  与椭圆交于不同的两点  $M, N$ , 则  $\triangle F_1MN$  的内切圆的面积是否存在最大值? 若存在求出这个最大值及此时的直线方程; 若不存在, 请说明理由.

89. (2008 陕西) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ , 短轴的一个端点

到右焦点的距离为  $\sqrt{3}$ .

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 设直线  $l$  与椭圆  $C$  交于  $A, B$  两点, 坐标原点  $O$  到  $l$  的距离的  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 求  $\triangle AOB$  面积的最大值.

90. (2016 新课标 1) 设圆  $x^2 + y^2 + 2x - 15 = 0$  的圆心为  $A$ , 直线  $l$  过点  $B(1,0)$  且与  $x$  轴不重合,  $l$  交圆  $A$  于  $C, D$  两点, 过  $B$  作  $AC$  的平行线交  $AD$  于点  $E$ .

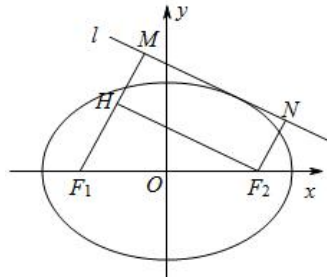
(1) 证明  $|EA| + |EB|$  为定值, 并写出点  $E$  的轨迹方程;

(2) 设点  $E$  的轨迹为曲线  $C_1$ , 直线  $l$  交  $C_1$  于  $M, N$  两点, 过  $B$  且与  $l$  垂直的直线与圆  $A$  交于  $P, Q$  两点, 求四边形  $MPNQ$  面积的取值范围.

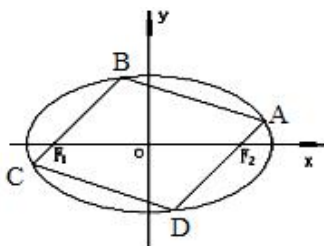
91. 已知两点  $F_1(-1,0)$  及  $F_2(1,0)$ , 点  $P$  是以  $F_1, F_2$  为焦点的椭圆  $C$  上, 且  $|PF_1|, |F_1F_2|, |PF_2|$  构成等差数列.

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 如图, 动直线  $l: y = kx + m$  与椭圆  $C$  有且仅有一个公共点, 点  $M, N$  是直线  $l$  上的两点, 且  $F_1M \perp l, F_2N \perp l$ , 求四边形  $F_1MNF_2$  面积  $S$  的最大值.



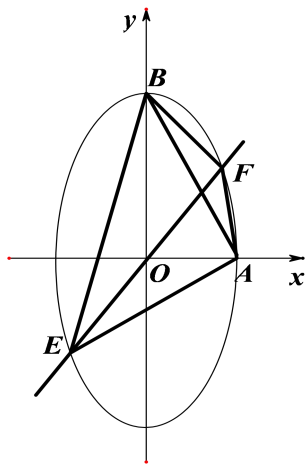
92. 已知椭圆  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ , 两点  $F_1(-1,0)$ ,  $F_2(1,0)$  为椭圆  $C$  的焦点, 点  $P$  在椭圆  $C$  上, 且  $|PF_1| + |PF_2| = 2|F_1F_2|$ .



(1) 求椭圆  $C$  的标准方程;

(2) 如图已知椭圆  $C$  的内接平行四边形  $ABCD$  的一组对边分别过椭圆的焦点  $F_1, F_2$ , 求该平行四边形  $ABCD$  面积的最大值.

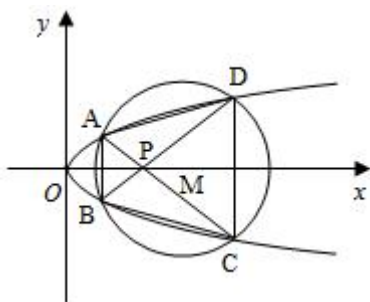
93. 已知椭圆  $C: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 以原点为圆心, 椭圆的短半轴长为半径的圆与直线  $x - y + \sqrt{2} = 0$  相切.  $A, B$  是椭圆  $C$  的右顶点与上顶点, 直线  $y = kx (k > 0)$  与椭圆相交于  $E, F$  两点.



- (1) 求椭圆  $C$  的方程;
- (2) 当四边形  $AEBF$  面积取最大值时, 求  $k$  的值.

94. (2009 年全国 1) 如图, 已知抛物线  $E: y^2 = x$  与圆  $M: (x - 4)^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$  相交于  $A, B, C, D$  四个点.

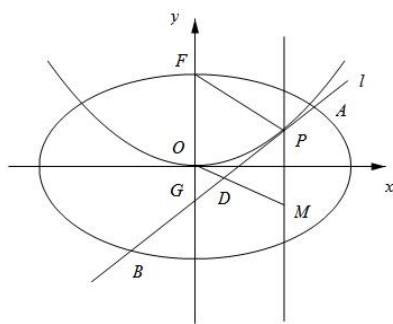
- (1) 求  $r$  的取值范围;
- (2) 当四边形  $ABCD$  的面积最大时, 求对角线  $AC, BD$  的交点  $P$  的坐标.



95. (2016 年山东) 平面直角坐标系  $xOy$  中, 椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率是  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 抛物线  $E: x^2 = 2y$  的焦点  $F$  是  $C$  的一个顶点.

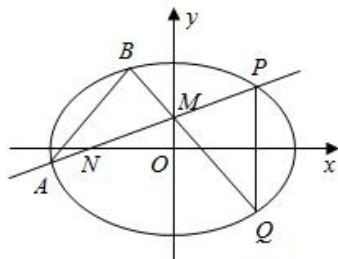
- (1) 求椭圆  $C$  的方程;  
 (2) 设  $P$  是  $E$  上的动点, 且位于第一象限,  $E$  在点  $P$  处的切线  $l$  与  $C$  交与不同的两点  $A, B$ , 线段  $AB$  的中点为  $D$ , 直线  $OD$  与过  $P$  且垂直于  $x$  轴的直线交于点  $M$ .

- (i) 求证: 点  $M$  在定直线上;  
 (ii) 直线  $l$  与  $y$  轴交于点  $G$ , 记  $\triangle PFG$  的面积为  $S_1$ ,  $\triangle PDM$  的面积为  $S_2$ , 求  $\frac{S_1}{S_2}$  的最大值及取得最大值时点  $P$  的坐标.



96. (2016 山东) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的长轴长为 4, 焦距为  $2\sqrt{2}$ .

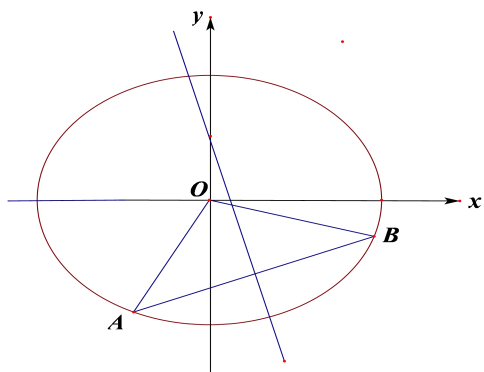
- (1) 求椭圆  $C$  的方程;  
 (2) 过动点  $M(0, m)$  的直线交  $x$  轴与点  $N$ , 交  $C$  于点  $A, P (P$  在第一象限), 且  $M$  是线段  $PN$  的中点. 过点  $P$  作  $x$  轴的垂线交  $C$  于另一点  $Q$ , 延长线  $QM$  交  $C$  于点  $B$ .



- (i) 设直线  $PM, QM$  的斜率分别为  $k, k'$ , 证明  $\frac{k'}{k}$  为定值;  
 (ii) 求直线  $AB$  的斜率的最小值.

97. (2015 浙江理) 已知椭圆  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$  上两个不同的点  $A, B$  关于直线  $y = mx + \frac{1}{2}$  对称.

- (1) 求实数  $m$  的取值范围;
- (2) 求  $\triangle AOB$  面积的最大值 ( $O$  为坐标原点).



98. (2016 陕西省三模) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 短轴长为 2.

- (1) 求椭圆  $C$  的标准方程;
- (2) 设  $P$  为椭圆  $C$  上任意一点, 以  $P$  为圆心,  $OP$  为半径的圆  $P$  与以椭圆  $C$  的右焦点  $F$  为圆心, 其中  $O$  为坐标原点, 以  $\sqrt{5}$  为半径的圆  $F$  相交于  $A, B$  两点, 求  $\triangle PAB$  的面积最大值.

99. 椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ , 作直线  $l$  交椭圆于  $P, Q$  两点,  $M$  为线段  $PQ$  的中点,

$O$  为坐标原点, 设直线  $l$  的斜率为  $k_1$ , 直线  $OM$  的斜率为  $k_2$ ,  $k_1 k_2 = -\frac{2}{3}$ .

(1) 求椭圆  $C$  的离心率;

(2) 设直线  $l$  与  $x$  轴交于点  $D(-\sqrt{3}, 0)$ , 且满足  $\overrightarrow{DP} = 2\overrightarrow{QD}$ , 当  $\Delta OPQ$  的面积最大时, 求椭圆  $C$  的方程.

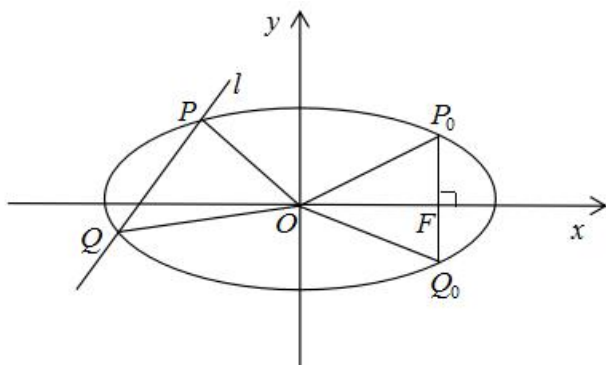
100. (2016 重庆一模) 如图,  $F$  是椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的右焦点,  $O$  是坐标原点,

$|OF| = \sqrt{5}$ , 过  $F$  做  $OF$  的垂线交椭圆于  $P_0, Q_0$  两点,  $\Delta OP_0Q_0$  的面积为  $\frac{4\sqrt{5}}{3}$ .

(1) 求该椭圆的标准方程;

(2) 若直线  $l$  与椭圆上、下部分分别交于点  $P, Q$ , 与  $x$  轴交于点  $M$ , 且  $|PM| = 2|MQ|$ ,

求  $\Delta OPQ$  的面积取得最大值时直线  $l$  的方程.





101. (2014 陕西三模) 设中心为坐标原点  $O$  的椭圆  $C$  的短轴长为 2, 且一个焦点为  $F(1,0)$

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 设过点  $P(t,0)$  的直线  $l$  与椭圆  $C$  交于不同的两点  $A, B$ , 当  $t > \sqrt{2}$  时, 求  $\triangle AOB$  面积的最大值.

102. (2015 年山东理) 平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离

心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 左、右焦点分别是  $F_1, F_2$ , 以  $F_1$  为圆心, 以 3 为半径的圆与以  $F_2$  为圆心, 以 1 为半径的圆相交, 交点在椭圆  $C$  上.

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 设椭圆  $E: \frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2} = 1$ ,  $P$  为椭圆  $C$  上的任意一点, 过点  $P$  的直线  $y = kx + m$  交椭圆  $E$  于  $A, B$  两点, 射线  $PO$  交椭圆  $E$  于点  $Q$ .

(i) 求  $\frac{|OQ|}{|OP|}$  的值;

(ii) 求  $\triangle ABQ$  面积最大值.

103. 如图,  $O$  为坐标原点, 椭圆  $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 离心率为  $e_1$ ; 双曲线  $C_2: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的左右焦点分别为  $F_3, F_4$ , 离心率为  $e_2$ , 已知  $e_1 e_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 且

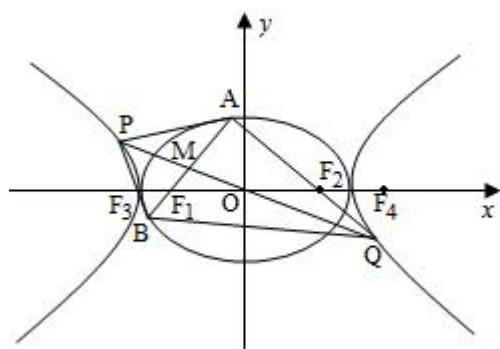
$|F_2 F_4| = \sqrt{3} - 1$ .

$|F_2 F_4| = \sqrt{3} - 1$ .

(1) 求  $C_1, C_2$  的方程;

(2) 过  $F_1$  点作  $C_1$  的不垂直于  $y$  轴的弦  $AB$ ,  $M$  为  $AB$  的中点, 当直线  $OM$  与  $C_2$  交于  $P, Q$

两点时, 求四边形  $APBQ$  面积的最小值.



104. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的下顶点为  $P(0, -1)$ ,  $P$  到焦点的距离为  $\sqrt{2}$ .

(1) 设  $Q$  是椭圆上的动点, 求  $|PQ|$  的最大值;

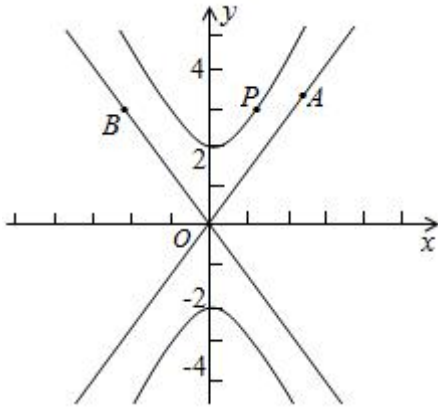
(2) 若直线  $l$  与圆  $O: x^2 + y^2 = 1$  相切, 并与椭圆  $C$  交于不同的两点  $A, B$ . 当  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \lambda$ ,

且满足  $\frac{2}{3} \leq \lambda \leq \frac{3}{4}$  时, 求  $\Delta AOB$  面积  $S$  的取值范围.

105. (2009 陕西) 已知双曲线  $C$  的方程为  $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ , 离心率  $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$ , 顶点到渐近线的距离为  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

(1) 求双曲线  $C$  的方程;

(2) 如图,  $P$  是双曲线  $C$  上一点,  $A, B$  两点在双曲线  $C$  的两条渐近线上, 且分别位于第一、二象限, 若  $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB}, \lambda \in [\frac{1}{3}, 2]$ , 求  $\triangle AOB$  面积的取值范围.



106. (2016 宝鸡二模) 已知抛物线  $G$  的顶点在原点, 焦点在  $y$  轴的正半轴上, 抛物线上的点  $P(m, 4)$  到焦点的距离等于 5.

(1) 求抛物线  $G$  的方程;

(2) 若正方形  $ABCD$  的三个顶点  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3) (x_1 < 0 \leq x_2 < x_3)$  在抛物线上, 可设直线  $BC$  的斜率  $k$ , 求正方形  $ABCD$  面积的最小值.

107. 已知椭圆  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ ，过  $F_1$  的直线交椭圆于  $B, D$  两点，

过  $F_2$  的直线交椭圆于  $A, C$  两点，且  $AC \perp BD$ ，垂足为  $P$ 。

(1) 设  $P$  点的坐标为  $(x_0, y_0)$ ，证明： $\frac{x_0^2}{3} + \frac{y_0^2}{2} < 1$ ；

(2) 求四过形  $ABCD$  的面积的最小值。

108. 已知抛物线  $E: y^2 = 2px (p > 0)$ ，直线  $x = my + 3$  与  $E$  交于  $A, B$  两点，且

$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 6$ ，其中  $O$  为坐标原点。

(1) 求抛物线  $E$  的方程；

(2) 已知点  $C$  的坐标为  $(-3, 0)$ ，记直线  $CA, CB$  的斜率分别为  $k_1, k_2$ ，证明：

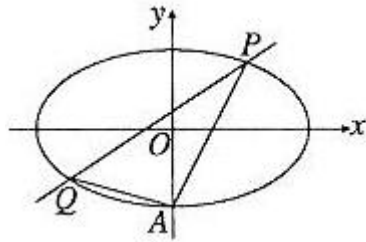
$\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} - 2m^2$  为定值。

109. (2015 陕西文) 如图, 椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  经过点  $A(0, -1)$ , 且离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

(1) 求椭圆  $E$  的方程;

(2) 经过点  $(1, 1)$ , 且斜率为  $k$  的直线与椭圆  $E$  交于不同两点  $P, Q$  (均异于点  $A$ ), 证明:

直线  $AP$  与  $AQ$  的斜率之和为 2.



110. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{1}{2}$ , 以原点  $O$  为圆心, 椭圆的短半轴长为半径的圆与直线  $x - y + \sqrt{6} = 0$  相切.

长为半径的圆与直线  $x - y + \sqrt{6} = 0$  相切.

(1) 求椭圆  $C$  的标准方程;

(2) 若直线  $l: y = kx + m$  与椭圆  $C$  相交于  $A, B$  两点, 且  $k_{OA} \cdot k_{OB} = -\frac{b^2}{a^2}$ , 判断  $\triangle AOB$  的面积是否为定值? 若为定值, 求出定值; 若不为定值, 说明理由.

111. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{1}{2}$ , 右焦点  $F_2$  到直线  $l_1: 3x + 4y = 0$  的距离为  $\frac{3}{5}$ .

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过椭圆右焦点  $F_2$  斜率为  $k (k \neq 0)$  的直线  $l$  与椭圆 C 相交于 E、F 两点, A 为椭圆的右顶点, 直线 AE, AF 分别交直线  $x = 3$  于点 M, N, 线段 MN 的中点为 P, 记直线  $PF_2$  的斜率为  $k'$ , 求证:  $k \cdot k'$  为定值.

112. 已知抛物线  $E: x^2 = 2py (p > 0)$ , 直线  $y = kx + 2$  与 E 交于 A、B 两点, 且  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2$ , 其中 O 为原点.

(1) 求抛物线 E 的方程;

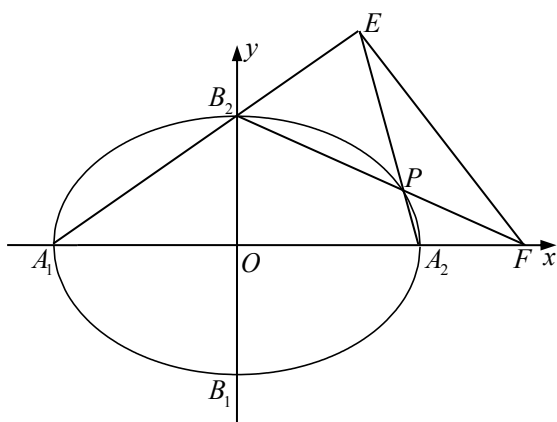
(2) 点 C 坐标为  $(0, -2)$ , 记直线 CA、CB 的斜率分别为  $k_1, k_2$ , 证明:  $k_1^2 + k_2^2 - 2k^2$  为定值.

113. 设椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 直线  $y = x + \sqrt{2}$  与以原点为圆心、椭圆  $C$  的短半轴长为半径的圆  $O$  相切.

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 设直线  $x = \frac{1}{2}$  与椭圆  $C$  交于不同的两点  $M, N$ , 以线段  $MN$  为直径作圆  $D$ . 若圆  $D$  与  $y$  轴相交于不同的两点  $A, B$ , 求  $\triangle ABD$  的面积;

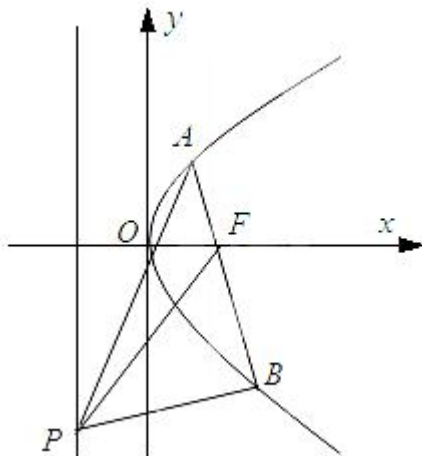
(3) 如图,  $A_1, A_2, B_1, B_2$  是椭圆  $C$  的顶点,  $P$  是椭圆  $C$  上除顶点外的任意点, 直线  $B_2P$  交  $x$  轴于点  $F$ , 直线  $A_1B_2$  交  $A_2P$  于点  $E$ . 设  $A_2P$  的斜率为  $k$ ,  $EF$  的斜率为  $m$ , 求证:  $2m - k$  为定值.



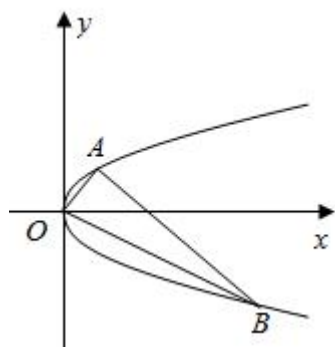
114. 已知抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  上点  $M(3, m)$  到焦点  $F$  的距离为 4.

(1) 求抛物线方程;

(2) 点  $P$  为准线上任意一点,  $AB$  为抛物线上过焦点的任意一条弦 (如图), 设直线  $PA, PB, PF$  的斜率为  $k_1, k_2, k_3$ , 问是否存在实数  $\lambda$ , 使得  $k_1 + k_2 = \lambda k_3$  恒成立. 若存在, 请求出  $\lambda$  的值; 若不存在, 请说明理由.



115. 已知抛物线  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 上点  $T(3, t)$  到焦点  $F$  的距离为 4.



(1) 求  $t, p$  值;

(2) 设  $A, B$  是抛物线上分别位于  $x$  轴两侧的两个动点, 且  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 5$  (其中  $O$  为坐标原点). 求证: 直线  $AB$  过定点, 并求出该定点的坐标.

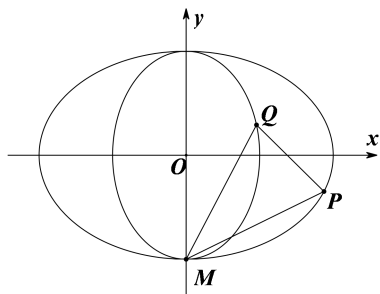
116. 已知抛物线  $C: y^2 = 2px$  经过点  $M(2, 2)$ ,  $C$  在点  $M$  处的切线交  $x$  轴于点  $N$ , 直线  $l_1$  经过点  $N$  且垂直于  $x$  轴.

(1) 求线段  $ON$  的长;

(2) 设不经过点  $M$  和  $N$  的动直线  $l_2: x = my + b$  交  $C$  于点  $A$  和  $B$ , 交  $l_1$  于点  $E$ , 若直线  $MA, ME, MB$  的斜率依次成等差数列, 试问:  $l_2$  是否过定点? 请说明理由.



117. 如图, 中心在坐标原点, 焦点分别在  $x$  轴和  $y$  轴上的椭圆  $T_1, T_2$  都过点  $M(0, -\sqrt{2})$ , 且椭圆  $T_1$  与  $T_2$  的离心率均为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .



(1) 求椭圆  $T_1$  与椭圆  $T_2$  的标准方程;

(2) 过点  $M$  引两条斜率分别为  $k, k'$  的直线分别交  $T_1, T_2$  于点  $P, Q$ , 当  $k' = 4k$  时, 问直线  $PQ$  是否过定点? 若过定点, 求出定点坐标; 若不过定点, 请说明理由.

118. 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 右焦点  $F(1, 0)$ , 过  $F$  作互相垂直

的弦  $AB, CD$ , 设  $AB, CD$  的中点分别为  $M, N$ .

(1) 求椭圆的方程;

(2) 求证: 直线  $MN$  过定点  $P$ , 并求出定点  $P$  的坐标.

119. 椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 且离心率为  $\frac{1}{2}$ , 点  $P$  为椭圆上

一动点,  $\Delta F_1 P F_2$  内切圆面积的最大值为  $\frac{\pi}{3}$ .

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设椭圆的左顶点为  $A_1$ , 过右焦点  $F_2$  的直线  $l$  与椭圆相交于  $A, B$  两点, 连结  $A_1 A, A_1 B$  并延长交直线  $x = 4$  分别于  $P, Q$  两点, 以  $PQ$  为直径的圆是否恒过定点? 若是, 请求出定点坐标; 若不是, 请说明理由.

120. 已知抛物线的顶点在坐标原点  $O$ , 焦点  $F$  在  $x$  轴上, 抛物线上的点  $A$  到  $F$  的距离为 2, 且  $A$  的横坐标为 1. 直线  $l: y = kx + b$  与抛物线交于  $B, C$  两点.

(1) 求抛物线的方程;

(2) 当直线  $OB, OC$  的倾斜角之和为  $45^\circ$  时, 证明直线  $l$  过定点.

121. 已知中心在原点，焦点在  $x$  轴的椭圆过点  $E(1, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ ，且焦距为 2，过点  $P(1,1)$  分别

作斜率为  $k_1, k_2$  的椭圆的动弦  $AB, CD$ ，设  $M, N$  分别为线段  $AB, CD$  的中点.

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 若  $k_1 + k_2 = 1$ ，求证：直线  $MN$  恒过定点，并求出定点坐标.

122. 已知圆  $M: (x+1)^2 + y^2 = 16$ ，定点  $N(1, 0)$ ， $P$  是圆  $M$  上任意一点，线段  $PN$  的垂直平分线  $l$  交  $PM$  于点  $Q$ ，点  $Q$  的轨迹为曲线  $C$ .

(1) 求曲线  $C$  的方程;

(2) 若直线  $l: y = kx + m$  与曲线  $C$  相交于  $A, B$  两点 ( $A, B$  不是左右顶点)，且以  $AB$  为直径的圆过椭圆  $C$  的右顶点，求证：直线  $l$  过定点，并求出该定点的坐标.

123. 已知动圆  $E$  过定点  $M(0,2)$ ，且在  $x$  轴上截得弦长为 4，设该动圆圆心的轨迹为曲线  $C$

(1) 求曲线  $C$  方程；

(2) 点  $A$  为直线  $l: x - y - 2 = 0$  上任意一点，过  $A$  作曲线  $C$  的切线，切点分别为  $P, Q$ ，

求证：直线  $PQ$  恒过定点，并求出该定点.

124. 已知椭圆  $C$  过点  $M(1, \frac{\sqrt{6}}{2})$ ，点  $F(-\sqrt{2}, 0)$  是椭圆的左焦点，点  $P, Q$  是椭圆  $C$  上的

两个动点，且  $|PF|$ 、 $|MF|$ 、 $|QF|$  成等差数列.

(1) 求椭圆  $C$  的标准方程；

(2) 求证：线段  $PQ$  的垂直平分线经过一个定点  $A$ .

125. 已知  $F_1, F_2$  分别为椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左、右焦点, 且离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

点  $A(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  椭圆  $C$  上

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

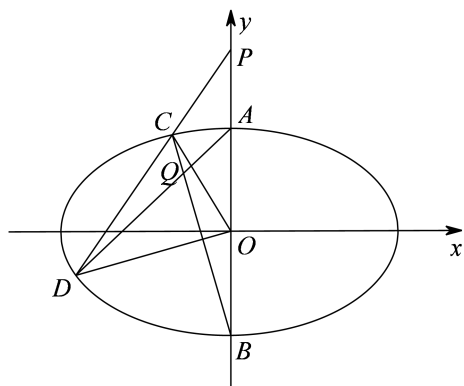
(2) 是否存在斜率为  $k$  的直线  $l$  与椭圆  $C$  交于不同的两点  $M, N$ , 使直线  $F_2M$  与  $F_2N$  的倾斜角互补, 且直线  $l$  是否恒过定点, 若存在, 求出该定点的坐标; 若不存在, 说明理由.

126. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ), 经过点  $(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ , 且两焦点与短轴的一个端点构成等腰直角三角形.

(1) 求椭圆方程;

(2) 过椭圆右顶点的两条斜率乘积为  $-\frac{1}{2}$  的直线分别交椭圆于  $M, N$  两点, 试问: 直线  $MN$  是否过定点? 若过定点, 请求出此定点, 若不过, 请说明理由.

127. (2016 届江苏省苏州大学高考考前指导卷 1 数学试卷) 椭圆  $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的焦距为  $2\sqrt{3}$ , 点  $P(0, 2)$  关于直线  $y = -x$  的对称点在椭圆  $M$  上.



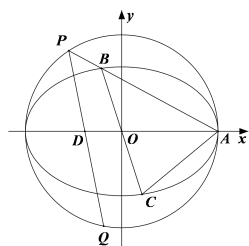
(1) 求椭圆  $M$  的方程;

(2) 如图, 椭圆  $M$  的上、下顶点分别为  $A, B$ , 过点  $P$  的直线  $l$  与椭圆  $M$  相交于两个不同的点  $C, D$ .

①求  $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$  的取值范围;

②当  $AD$  与  $BC$  相交于点  $Q$  时, 试问: 点  $Q$  的纵坐标是否是定值? 若是, 求出该定值; 若不是, 说明理由.

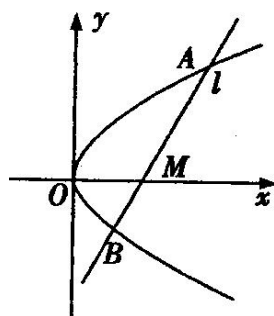
128. 如图, 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知圆  $O: x^2 + y^2 = 4$ , 椭圆  $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ,  $A$  为椭圆右顶点. 过原点  $O$  且异于坐标轴的直线与椭圆  $C$  交于  $B, C$  两点, 直线  $AB$  与圆  $O$  的另一交点为  $P$ , 直线  $PD$  与圆  $O$  的另一交点为  $Q$ , 其中  $D(-\frac{6}{5}, 0)$ . 设直线  $AB, AC$  的斜率分别为  $k_1, k_2$ .



- (1) 求  $k_1 k_2$  的值;
- (2) 记直线  $PQ, BC$  的斜率分别为  $k_{PQ}, k_{BC}$ , 是否存在常数  $\lambda$ , 使得  $k_{PQ} = \lambda k_{BC}$ ? 若存在, 求  $\lambda$  值; 若不存在, 说明理由;
- (3) 求证: 直线  $AC$  必过点  $Q$ .

129. 已知抛物线  $C: y^2 = 4x$ , 点  $M(m, 0)$  在  $x$  轴的正半轴上, 过点  $M$  的直线  $l$  与抛物线  $C$  相交于  $A, B$  两点,  $O$  为坐标原点.

- (1) 若  $m = 1$ , 且直线  $l$  的斜率为 1, 求以  $AB$  为直径的圆的方程;
- (2) 是否存在定点  $M$ , 使得不论直线  $l$  绕点  $M$  如何转动,  $\frac{1}{|AM|^2} + \frac{1}{|BM|^2}$  恒为定值?



130. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ , 以原点  $O$  为圆心, 椭圆  $C$  的长半轴为半径的圆与直线  $2x - \sqrt{2}y + 6 = 0$  相切.

半轴为半径的圆与直线  $2x - \sqrt{2}y + 6 = 0$  相切.

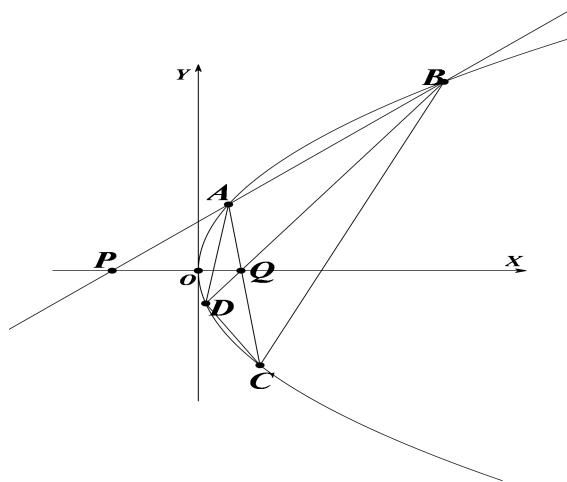
(1) 求椭圆  $C$  标准方程;

(2) 已知点  $A, B$  为动直线  $y = k(x - 2) (k \neq 0)$  与椭圆  $C$  的两个交点, 问: 在  $x$  轴上是否存在点  $E$ , 使  $\overrightarrow{EA}^2 + \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{AB}$  为定值? 若存在, 试求出点  $E$  的坐标和定值, 若不存在, 说明理由.

131. 已知抛物线  $\Gamma: y^2 = 2px$ , 准线与  $x$  轴的交点为  $P(-2, 0)$ .

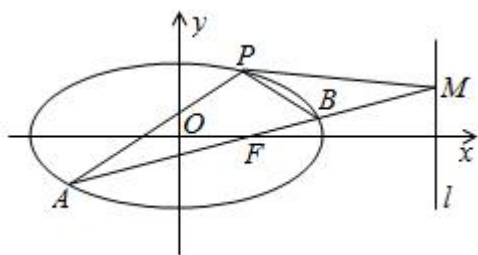
(1) 求抛物线  $\Gamma$  的方程;

(2) 如图,  $Q(1, 0)$ , 过点  $P$  的直线  $l$  与抛物线  $\Gamma$  交于不同的两点  $A, B$ ,  $AQ$  与  $BQ$  分别与抛物线  $\Gamma$  交于点  $C, D$ , 设  $AB, DC$  的斜率分别为  $k_1, k_2$ ,  $AD, BC$  的斜率分别为  $k_3, k_4$ , 问: 是否存在常数  $\lambda$ , 使得  $k_1 k_3 k_4 = \lambda k_2$ , 若存在, 求出  $\lambda$  的值, 若不存在, 说明理由.





132. 如图, 椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  经过点  $P(1, \frac{3}{2})$ , 离心率  $e = \frac{1}{2}$ , 直线  $l$  的方程为  $x = 4$ .



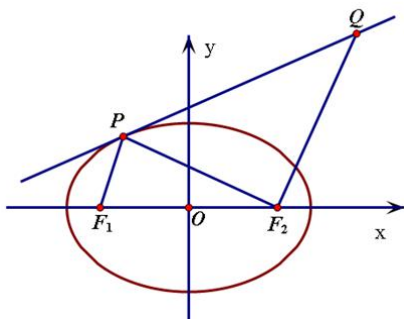
- (1) 求椭圆  $C$  的方程;  
 (2)  $AB$  是经过右焦点  $F$  的任一弦 (不经过点  $P$ ), 设直线  $AB$  与直线  $l$  相交于点  $M$ , 记  $PA$ 、 $PB$ 、 $PM$  的斜率分别为  $k_1$ 、 $k_2$ 、 $k_3$ . 问: 是否存在常数  $\lambda$ , 使得  $k_1 + k_2 = \lambda k_3$ ? 若存在, 求  $\lambda$  的值; 若不存在, 请说明理由.

133. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  与  $y$  轴的交点为  $A, B$  (点  $A$  位于点  $B$  的上方),

$F$  为左焦点, 原点  $O$  到直线  $FA$  的距离为  $\frac{\sqrt{2}}{2}b$ .

- (1) 求椭圆  $C$  的离心率;  
 (2) 设  $b = 2$ , 直线  $y = kx + 4$  与椭圆  $C$  交于不同的两点  $M, N$ , 求证: 直线  $BM$  与直线  $AN$  的交点  $G$  在定直线上.

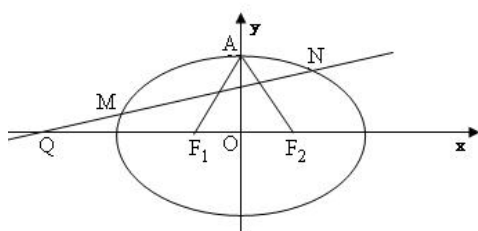
134. 已知  $F_1, F_2$  是椭圆  $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左右焦点, 椭圆  $\Gamma$  的离心率  $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $P(x_0, y_0)$  是  $\Gamma$  上异于左右顶点的任意一点, 且  $\Delta PF_1F_2$  的面积的最大值为 1.



- (1) 求椭圆  $\Gamma$  的方程;  
 (2) 直线  $l$  是椭圆在点  $P$  处的切线, 过  $F_2$  作  $PF_2$  的垂线, 交直线  $l$  相交于  $Q$ , 求证: 点  $Q$  落在一条定直线  $m$  上, 并求直线  $m$  的方程.

135. 如图, 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 其上顶点为

$A$ . 已知  $\Delta F_1AF_2$  是边长为 2 的正三角形.



- (1) 求椭圆  $C$  的方程;  
 (2) 过点  $Q(-4, 0)$  任作一动直线  $l$  交椭圆  $C$  于  $M, N$  两点, 记  $\overline{MQ} = \lambda \cdot \overline{QN}$ . 若在线段  $MN$  上取一点  $R$ , 使得  $\overline{MR} = -\lambda \cdot \overline{RN}$ , 当直线  $l$  运动时, 点  $R$  在某一定直线上运动, 求出该定直线的方程.

136. (2017 福州外国语学校高三适应性考试四数学(文)) 已知椭圆

$$C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0) \text{ 经过点 } (0, 1), \text{ 离心率为 } \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 设直线  $l: x = my + 1$  与椭圆  $C$  交于  $A, B$ , 点  $A$  关于  $x$  轴的对称点  $A'$  ( $A'$  与  $B$  不重合), 则直线  $A'B$  与  $x$  轴是否交于一定点? 若是, 请写出定点坐标, 并证明你的结论; 若不是, 请说明理由.

137. 在平面直角坐标平面中,  $\triangle ABC$  的两个顶点为  $B(0, -1), C(0, 1)$ , 平面内两点  $P, Q$

同时满足: ①  $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$ ; ②  $|\overrightarrow{QA}| = |\overrightarrow{QB}| = |\overrightarrow{QC}|$ ; ③  $\overrightarrow{PQ} // \overrightarrow{BC}$ .

(1) 求顶点  $A$  的轨迹  $E$  的方程;

(2) 过点  $F(\sqrt{2}, 0)$  作两条互相垂直的直线  $l_1, l_2$ , 直线  $l_1, l_2$  与点  $A$  的轨迹  $E$  相交弦分别为  $A_1B_1, A_2B_2$ , 设弦  $A_1B_1, A_2B_2$  的中点分别为  $M, N$ .

① 求四边形  $A_1A_2B_1B_2$  的面积  $S$  的最小值;

② 试问: 直线  $MN$  是否恒过一个定点? 若过定点, 请求出该定点, 若不过定点, 请说明理由.

138. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$ , 在此抛物线上一点  $N(2, m)$  到焦点的距离是 3.

(1) 求此抛物线的方程;

(2) 抛物线  $C$  的准线与  $x$  轴交于  $M$  点, 过  $M$  点斜率为  $k$  的直线  $l$  与抛物线  $C$  交于  $A$ 、 $B$  两点. 是否存在这样的  $k$ , 使得抛物线  $C$  上总存在点  $Q(x_0, y_0)$  满足  $QA \perp QB$ , 若存在, 求  $k$  的取值范围; 若不存在, 说明理由.

139. 在直角坐标系  $xOy$  中, 已知一动圆经过点  $(2, 0)$  且在  $y$  轴上截得的弦长为 4, 设动圆圆心的轨迹为曲线  $C$ .

(1) 求曲线  $C$  的方程;

(2) 过点  $(1, 0)$  作互相垂直的两条直线  $l_1, l_2$ ,  $l_1$  与曲线  $C$  交于  $A, B$  两点  $l_2$  与曲线  $C$  交于  $E, F$  两点, 线段  $AB, EF$  的中点分别为  $M, N$ , 求证: 直线  $MN$  过定点  $P$ , 并求出定点  $P$  的坐标.

140. 平面直角坐标系  $xOy$  中, 椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的右焦点为  $F$ , 离心率

$e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 过点  $F$  且垂直于  $x$  轴的直线被椭圆  $C$  截得的弦长为 1.

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 记椭圆  $C$  的上、下顶点分别为  $A, B$ , 设过点  $M = (m, -2) (m \neq 0)$  的直线  $MA, MB$  与椭圆  $C$  分别交于点  $P, Q$ , 求证: 直线  $PQ$  必定过一定点, 并求该定点的坐标.

141. 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  右焦点为  $F(2, 0)$ ,  $M$  为椭圆的上顶点,  $O$  为坐标

原点, 且  $\triangle MOF$  是等腰直角三角形.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 过点  $M$  分别作直线  $MA, MB$  交椭圆于  $A, B$  两点, 设两直线的斜率分别为  $k_1, k_2$ , 且

$k_1 + k_2 = 8$ , 证明: 直线  $AB$  过定点  $(-\frac{1}{2}, -2)$ .

142. 已知抛物线  $C$  的顶点在原点，焦点在坐标轴上，点  $A(1,2)$  为抛物线  $C$  上一点.

(1) 求  $C$  的方程;

(2) 若点  $B(1,-2)$  在  $C$  上, 过  $B$  作  $C$  的两弦  $BP$  与  $BQ$ , 若  $k_{BP} \cdot k_{BQ} = -2$ , 求证: 直线  $PQ$  过定点.

143. (2017 成都七中一诊) 平面上两定点  $F_1(-1,0)$ ,  $F_2(1,0)$ , 动点  $P$  满足  $|PF_1| + |PF_2| = k$

(1) 求动点  $P$  的轨迹;

(2) 当  $k=4$  时, 动点  $P$  的轨迹为曲线  $C$ , 已知  $M(-\frac{1}{2}, 0)$ , 过  $M$  的动直线  $l$  (斜率存在且不为 0) 与曲线  $C$  交于  $P, Q$  两点,  $S(2,0)$ , 直线  $l_1: x=-3$ ,  $SP, SQ$  分别与  $l_1$  交于  $A, B$  两点,  $A, B, P, Q$  坐标分别为  $A(x_A, y_A)$ ,  $B(x_B, y_B)$ ,  $P(x_P, y_P)$ ,  $Q(x_Q, y_Q)$

求证:  $\frac{\frac{1}{y_A} + \frac{1}{y_B}}{\frac{1}{y_P} + \frac{1}{y_Q}}$  为定值, 并求出此定值.

144. (浙江省 9+1 高中联盟 2017 届高三上学期期中考试) 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ,

过  $P(0, \frac{b}{2})$  的直线  $l$  与椭圆交于  $A, B$  两点, 过  $Q(x_0, 0) (|x_0| < a)$  的直线  $l'$  与椭圆交于  $M, N$  两点.

(1) 当  $l$  的斜率是  $k$  时, 用  $a, b, k$  表示出  $|PA| \cdot |PB|$  的值;

(2) 若直线  $l, l'$  的倾斜角互补, 是否存在实数  $x_0$ , 使  $\frac{|PA| \cdot |PB|}{|MN|^2}$  为定值, 若存在, 求出

该定值及  $x_0$ , 若不存在, 说明理由.

145. (2010 北京) 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 点  $B$  与  $A(-1, 1)$  关于原点  $O$  对称,  $P$  是动点,

且直线  $AP$  与  $BP$  的斜率之积等于  $-\frac{1}{3}$ .

(1) 求动点  $P$  的轨迹方程;

(2) 设直线  $AP$  和  $BP$  分别与直线  $x = 3$  交于点  $M, N$ , 问: 是否存在点  $P$  使得  $\triangle PAB$  与  $\triangle PMN$  的面积相等? 若存在, 求出点  $P$  的坐标; 若不存在, 说明理由.

146. (2011 山东) 已知动直线  $l$  与椭圆  $C: \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$  交于  $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$  两不同点,

且  $\triangle OPQ$  的面积  $S_{\triangle OPQ} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ , 其中  $O$  为坐标原点.

(1) 证明  $x_1^2 + x_2^2$  和  $y_1^2 + y_2^2$  均为定值;

(2) 设线段  $PQ$  的中点为  $M$ , 求  $|OM| \cdot |PQ|$  的最大值;

(3) 椭圆  $C$  上是否存在点  $D, E, G$ , 使得  $S_{\triangle ODE} = S_{\triangle ODG} = S_{\triangle OEG} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ? 若存在, 判断  $\triangle DEG$  的形状; 若不存在, 请说明理由.

147. (2016 新课标 2) 已知  $A$  是椭圆  $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  的左顶点, 斜率为  $k(k > 0)$  的直线交  $E$

于  $A, M$  两点, 点  $N$  在  $E$  上,  $MA \perp NA$ .

(1) 当  $|AM| = |AN|$  时, 求  $\triangle AMN$  的面积;

(2) 当  $2|AM| = |AN|$  时, 证明:  $\sqrt{3} < k < 2$ .



148. (重庆市第一中学 2017 届高三 12 月月考数学 (理) 试题) 已知  $A(-2,0), B(2,0)$ , 动点  $P$  满足  $k_{PA} \cdot k_{PB} = t$ , 其中  $k_{PA}, k_{PB}$  分别表示直线  $PA, PB$  的斜率,  $t$  为常数, 当  $t = -1$  时,  $P$  的轨迹为  $C_1$ ; 当  $t = -\frac{1}{4}$  时,  $P$  的轨迹为  $C_2$ .

(1) 求  $C_1$  的方程;

(2) 过点  $E(-\sqrt{3}, 0)$  的直线  $l$  与曲线  $C_1, C_2$  顺次交于四点  $P_1, P_2, P_3, P_4$ , 且  $P_1, P_4 \in C_1$ ,  $P_2, P_3 \in C_2$ , 是否存在这样的直线  $l$ , 使得  $|P_1P_2|, |P_2P_3|, |P_3P_4|$  成等差数列? 若存在, 求出直线  $l$  的方程, 若不存在, 请说明理由.

149. (2012 北京理) 已知曲线  $C: (5-m)x^2 + (m-2)y^2 = 8 (m \in R)$ .

(1) 若曲线  $C$  是焦点在  $x$  轴上的椭圆, 求  $m$  的取值范围;

(2) 设  $m = 4$ , 曲线  $C$  与  $y$  轴的交点为  $A, B$  (点  $A$  位于点  $B$  的上方), 直线  $y = kx + 4$  与曲线  $C$  交于不同的两点  $M, N$ , 直线  $y = 1$  与直线  $BM$  交于点  $G$ , 求证:  $A, G, N$  三点共线.

150. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  上的左、右顶点分别为  $A, B$ ,  $F_1$  为左焦点, 且

$|AF_1| = 2$ , 又椭圆  $C$  过点  $(0, 2\sqrt{3})$ .

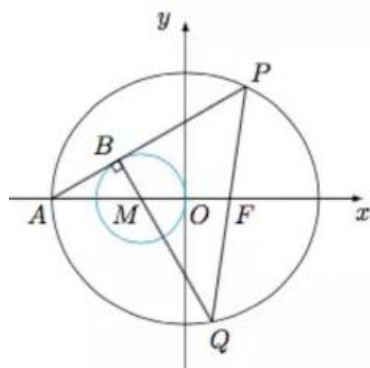
(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 点  $P$  和  $Q$  分别在椭圆  $C$  和圆  $x^2 + y^2 = 16$  上 (点  $A, B$  除外), 设直线  $PB, QB$  的斜率分别为  $k_1, k_2$ , 若  $k_1 = \frac{3}{4}k_2$ , 证明:  $A, P, Q$  三点共线.

151. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$  及圆  $M: x^2 + 2x + y^2 + m = 0$ , 过椭圆的左顶点  $A$  且与圆  $M$

相切于点  $B$  的直线交椭圆  $C$  于点  $P$ ,  $P$  与椭圆  $C$  的右焦点  $F$  的连线交椭圆于  $Q$ , 若

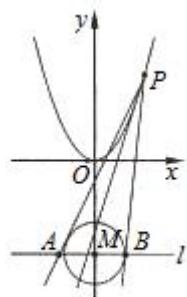
$B, M, Q$  三点共线, 求实数  $m$  的值.



152. (2011 浙江文) 如图, 设  $P$  是抛物线  $C_1: x^2 = y$  上动点。圆  $C_2: x^2 + (y+3)^2 = 1$  的圆心为点  $M$ , 过点  $P$  做圆  $C_2$  的两条切线, 交直线  $l: y = -3$  于  $A, B$  两点.

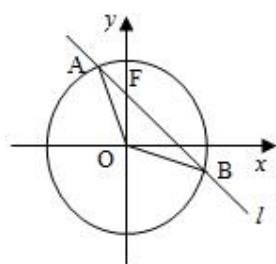
(1) 求  $C_2$  的圆心  $M$  到抛物线  $C_1$  准线的距离;

(2) 是否存在点  $P$ , 使线段  $AB$  被抛物线  $C_1$  在点  $P$  处得切线平分, 若存在, 求出点  $P$  的坐标; 若不存在, 请说明理由.



153. (2011 大纲卷) 已知  $O$  为坐标原点,  $F$  为椭圆  $C: x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$  在  $y$  轴正半轴上的焦点,

过  $F$  且斜率为  $-\sqrt{2}$  的直线  $l$  与  $C$  交于  $A, B$  两点, 点  $P$  满足  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP} = \mathbf{0}$ .



(1) 证明: 点  $P$  在  $C$  上;

(2) 设点  $P$  关于点  $O$  的对称点为  $Q$ , 证明:  $A, P, B, Q$  四点在同一个圆上.

154. (2002 广东) 设  $A, B$  是双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$  上的两点, 点  $N(1, 2)$  是线段  $AB$  的中点.

(1) 求直线  $AB$  的方程;

(2) 如果线段  $AB$  的垂直平分线与双曲线相交于  $C, D$  两点, 那么  $A, B, C, D$  四点是否共圆? 为什么?

155. (2005 湖北) 设  $A, B$  是椭圆  $3x^2 + y^2 = \lambda$  上的两点, 点  $N(1, 3)$  是线段  $AB$  的中点, 线段  $AB$  的垂直平分线与椭圆相交于  $C, D$  两点.

(1) 确定  $\lambda$  的取值范围, 并求直线  $AB$  的方程;

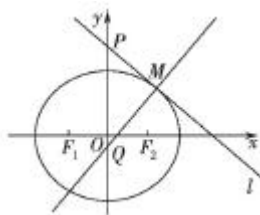
(2) 试判断是否存在这样的  $\lambda$ , 使得  $A, B, C, D$  四点在同一个圆上? 并说明理由.

156. (2014 大纲) 已知抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点为  $F$ , 直线  $y = 4$  与  $y$  轴的交点为  $P$ , 与  $C$  的交点为  $Q$ , 且  $|QF| = \frac{5}{4}|PQ|$ .

(1) 求  $C$  的方程;

(2) 过  $F$  的直线  $l$  与  $C$  相交于  $A, B$  两点, 若  $AB$  的垂直平分线  $l'$  与  $C$  相交于  $M, N$  两点, 且  $A, M, B, N$  四点在同一圆上, 求  $l$  的方程.

157. 已知椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 以  $F_1, F_2$  及椭圆的一个短轴端点为顶点的三角形是等边三角形, 椭圆的右顶点到右焦点的距离为 1.



(1) 求椭圆  $E$  的方程;

(2) 如图, 直线  $l$  与椭圆  $E$  有且只有一个公共点  $M$ , 且交  $y$  轴于点  $P$ , 过点  $M$  作垂直于  $l$  的直线交  $y$  轴于点  $Q$ , 求证:  $F_1, Q, F_2, M, P$  五点共圆.

158. (2017 高考调研) 已知抛物线  $E: y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点到准线的距离为 2.

(1) 求抛物线  $E$  的方程;

(2) 直线  $l_1$  与抛物线  $E$  相交于  $A, B$  两点,  $C$  为抛物线  $E$  上异于  $A, B$  的一点, 且  $AC$  垂直  $x$  轴, 过点  $B$  作  $AC$  的垂线交  $AC$  于  $M$ , 过  $C$  作直线  $l_2$  交直线  $BM$  于  $N$ , 设直线  $l_1, l_2$  的斜率分别为  $k_1, k_2$ , 且  $k_1 k_2 = 1$ .

① 线段  $MN$  的长度是否为定值?

② 求证:  $A, B, C, N$  四点共圆.

159. 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $P$  是椭圆上一点, 且  $\Delta PF_1 F_2$  面积的最大值等于 2.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 直线  $y = 2$  上是否存在点  $Q$ , 使得从该点向椭圆所引的两条切线相互垂直? 若存在, 求点  $Q$  的坐标; 若不存在, 说明理由.

160. (2014 广东) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的一个焦点为  $(\sqrt{5}, 0)$ , 离心率为  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ .

(1) 求椭圆  $C$  的标准方程;

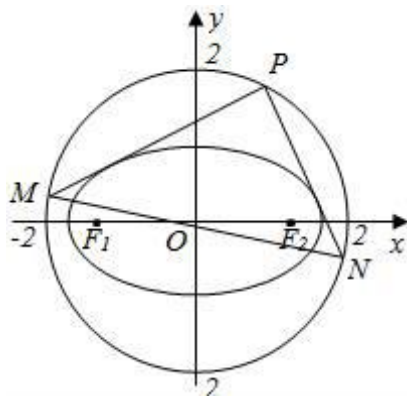
(2) 若动点  $P(x_0, y_0)$  为椭圆  $C$  外一点, 且点  $P$  到椭圆  $C$  的两条切线相互垂直, 求点  $P$  的轨迹方程.

161. (2016 南宁二模) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的两个焦点为  $F_1, F_2$ , 离心率为

$\frac{\sqrt{6}}{3}$ ,  $\triangle ABF_2$  的周长等于  $4\sqrt{3}$ , 点  $A, B$  在椭圆  $C$  上, 且  $F_1$  在边  $AB$  上.

(1) 求椭圆  $C$  的标准方程;

(2) 如图, 过圆  $O: x^2 + y^2 = 4$  上任意一点  $P$  作椭圆  $C$  的两条切线  $PM$  和  $PN$  与圆  $O$  交于点  $M, N$ , 求  $\triangle PMN$  面积的最大值.



162. (河南省天一大联考 2017 届高三上学期阶段性测试 (三) (12 月) 数学 (理))  $O$  为坐标原点, 椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 以椭圆  $C$  的长轴长、短轴长分别为邻边的矩形的面积为 8.

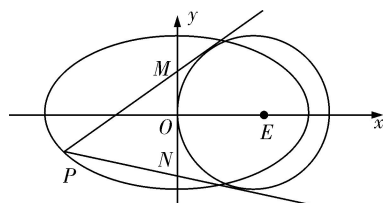
(1) 求椭圆  $C$  的标准方程;

(2) 若  $P, Q, M$  是椭圆上的点, 且圆  $M$  与直线  $OP, OQ$  相切,  $k_{OP} \cdot k_{OQ} = -\frac{1}{4}$ , 求圆  $M$  的半径  $r$ .

163. (2017 届湖南师大附中高三上学期第四次月考试题数学 (文)) 已知椭圆  $C$  的中心在原点, 离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 其右焦点是圆  $E: (x-1)^2 + y^2 = 1$  的圆心.

(1) 求椭圆  $C$  的标准方程;

(2) 如图, 过椭圆  $C$  上且位于  $y$  轴左侧的一点  $P$  作圆  $E$  的两条切线, 分别交  $y$  轴于点  $M, N$ . 试推断是否存在点  $P$ , 使  $|MN| = \frac{\sqrt{14}}{3}$ ? 若存在, 求点  $P$  的坐标; 若不存在, 请说明理由.





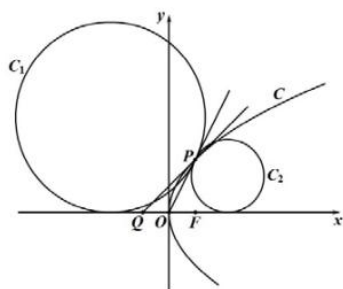
164. (2016年广州市普通高中毕业班综合测试(二)理) 已知点  $F(1,0)$ , 点  $A$  是直线  $l_1: x = -1$  上的动点, 过  $A$  作直线  $l_2$ ,  $l_1 \perp l_2$ , 线段  $AF$  的垂直平分线与  $l_2$  交于点  $P$ .

(1) 求点  $P$  的轨迹  $C$  的方程;

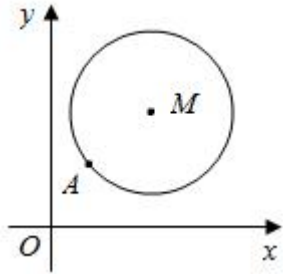
(2) 若点  $M, N$  是直线  $l_1$  上两个不同的点, 且  $\triangle PMN$  的内切圆方程为  $x^2 + y^2 = 1$ , 直线

$PF$  的斜率为  $k$ , 求  $\frac{|k|}{|MN|}$  的取值范围.

165. (2016全国数学竞赛) 如图所示, 在平面直角坐标系  $xOy$  中,  $F$  是  $x$  轴正半轴上的一个动点, 以  $F$  为焦点,  $O$  为顶点作抛物线  $C$ , 设  $P$  是第一象限内  $C$  上的一点,  $Q$  是  $x$  轴负半轴上一点, 使得  $PQ$  为  $C$  的切线, 且  $|PQ| = 2$ , 圆  $C_1, C_2$  均与直线  $OP$  相切于点  $P$ , 且均与  $x$  轴相切, 求点  $F$  的坐标, 使圆  $C_1$  与  $C_2$  的面积之和取到最小值.



166. (2016 江苏) 如图, 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知以  $M$  为圆心的圆  $M: x^2 + y^2 - 12x - 14y + 60 = 0$  及其上一点  $A(2, 4)$ .



- (1) 设圆  $N$  与  $x$  轴相切, 与圆  $M$  外切, 且圆心  $N$  在直线  $x = 6$  上, 求圆  $N$  的标准方程;
- (2) 设平行于  $OA$  的直线  $l$  与圆  $M$  相交于  $B, C$  两点, 且  $BC = OA$ , 求直线  $l$  的方程;
- (3) 设点  $T(t, 0)$  满足: 存在圆  $M$  上的两点  $P$  和  $Q$ , 使得  $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TP} = \overrightarrow{TQ}$ , 求实数  $t$  的取值范围.

167. (2016 浙江改编) 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ .

- (1) 若以椭圆的一个短轴为直角顶点的椭圆内接等腰直角三角形有且仅有三个, 求椭圆离心率的取值范围;
- (2) 当  $b = 1$  时,
  - ① 求直线  $y = kx + 1$  被椭圆截得的线段长 (用  $a, k$  表示);
  - ② 若任意以点  $A(0, 1)$  为圆心的圆与椭圆至多有 3 个公共点, 求椭圆离心率的取值范围.