

怀铁一中 2022 届高三数学综合测试卷

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若集合 $M = \{x | x = 45^\circ + k \cdot 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{x | x = 90^\circ + k \cdot 45^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, 则()

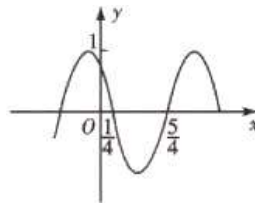
- A. $M = N$ B. $M \supsetneq N$ C. $M \subsetneq N$ D. $M \cap N = \emptyset$

2. 当 $\alpha \neq \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ 时, $(\cos \alpha + \frac{1}{\tan \alpha}) \cdot (\sin \alpha + \tan \alpha)$ 的值()

- A. 恒为正 B. 恒为负 C. 恒非负 D. 可正可负

3. 函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ 的部分图象如图所示, 则 $f(x)$ 的单调递减区间为()

- A. $(k\pi - \frac{1}{4}, k\pi + \frac{3}{4}), k \in \mathbb{Z}$ B. $(2k\pi - \frac{1}{4}, 2k\pi + \frac{3}{4}), k \in \mathbb{Z}$
 C. $(k - \frac{1}{4}, k + \frac{3}{4}), k \in \mathbb{Z}$ D. $(2k - \frac{1}{4}, 2k + \frac{3}{4}), k \in \mathbb{Z}$



4. 若函数 $y = f(x)$ 的图象上每一点的纵坐标保持不变, 横坐标伸长到原来的 2 倍, 再将整个图象沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位, 沿 y 轴向下平移 1 个单位, 得到函数 $y = \frac{1}{2} \sin x$ 的图象则 $y = f(x)$ 是()

- A. $y = \frac{1}{2} \sin(2x + \frac{\pi}{2}) + 1$ B. $y = \frac{1}{2} \sin(2x - \frac{\pi}{2}) + 1$
 C. $y = \frac{1}{2} \sin(2x - \frac{\pi}{4}) + 1$ D. $y = \frac{1}{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) + 1$

5. 设 O 为 $\triangle ABC$ 内部的一点, 且 $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = \vec{0}$, 则 $\triangle AOC$ 的面积与 $\triangle BOC$ 的面积之比为()

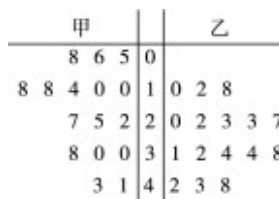
- A. 3:2 B. 5:3 C. 2:1 D. 3:1

6. 定义运算 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. 若 $\cos \alpha = \frac{1}{7}$, $\begin{vmatrix} \sin \alpha & \sin \beta \\ \cos \alpha & \cos \beta \end{vmatrix} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$, $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 则 $\beta =$ ()

- A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{3}$

7. 从甲乙两个城市分别随机抽取 16 台自动售货机, 对其销售额进行统计, 统计数据用茎叶图表示(如图所示). 设甲乙两组数据的平均数分别为 $\bar{x}_甲, \bar{x}_乙$, 中位数分别为 $m_甲, m_乙$, 则()

- A. $\bar{x}_甲 < \bar{x}_乙, m_甲 > m_乙$ B. $\bar{x}_甲 < \bar{x}_乙, m_甲 < m_乙$
 C. $\bar{x}_甲 > \bar{x}_乙, m_甲 > m_乙$ D. $\bar{x}_甲 > \bar{x}_乙, m_甲 < m_乙$



8. 设 a 是甲抛掷一个骰子得到的点数, 则方程 $x^2 + ax + 2 = 0$ 有两个不相等的实数根的概率为()

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{5}{12}$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对得 5 分，部分选对得 3 分，有选错的得 0 分.

9. 下列命题中，正确的是()

- A. 单位向量都相等； B. 一个向量方向不确定当且仅当模为 0； C. 四边形 $ABCD$ 是平行四边形当且仅当 $\vec{AB} = \vec{DC}$ ； D. 若 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a}| > |\vec{b}|$ 且 \vec{a} 与 \vec{b} 同向, 则 $\vec{a} > \vec{b}$ ； E. 若 $\vec{a} // \vec{b}$, $\vec{b} // \vec{c}$, 则 $\vec{a} // \vec{c}$.

10. 从装有 2 个红球和 2 个黑球的口袋中任取 2 个小球, 则下列结论正确的是()

- A. “至少一个红球”和“都是红球”是互斥事件；

- B. “恰有一个黑球”和“都是黑球”是互斥事件;
 C. “至少一个黑球”和“都是红球”是对立事件;
 D. “恰有一个红球”和“都是红球”是对立事件;
 E. “至多一个红球”和“至少一个黑球”是互斥事件.

11. 下列说法中, 正确说法的是 ()

A. 函数 $y = \tan x$ 在第一象限是增函数;

B. 若角 α 与角 β 的终边在一条直线上, 则 $\alpha - \beta = k \cdot 180^\circ (k \in \mathbf{Z})$;

C. 函数 $y = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 图象的一个对称中心是 $\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$;

D. 若 $\sin\left(2x_1 - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2x_2 - \frac{\pi}{4}\right)$, 则 $x_1 - x_2 = k\pi$, 其中 $k \in \mathbf{Z}$;

E. 已知 $f(x) = 2a \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 2ab (a > 0)$, $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, $f(x)$ 的值域为 $\{y \mid -3 \leq y \leq \sqrt{3} - 1\}$,

则 $a = b = 1$.

12. 如果若干个函数的图象经过平移后能够重合, 则称这些函数为“同簇函数”. 给出下列函数:

A. $f(x) = \sin x \cos x$;

B. $f(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

C. $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$;

D. $f(x) = \sqrt{2} \sin 2x + 1$

E. $f(x) = 2 \cos x$. 期中“同簇函数”的是 ()

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若 $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\sin\left(\frac{5\pi}{6} - x\right) =$ _____.

14. 设 $f(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} , 最小正周期为 $\frac{3\pi}{2}$ 的函数, 若 $f(x) = \begin{cases} \cos x, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0, \\ \sin x, & 0 < x \leq \pi, \end{cases}$ 则 $f\left(-\frac{15\pi}{4}\right)$ 的

值等于 _____.

15. 某工厂 400 名职工的年龄分布情况如下表:

50 岁以上	35~50 岁	35 岁以下
5%	40%	55%

现要从中抽取 80 名职工, 用系统抽样法, 将全体职工随机按 1~400 编号, 并按编号顺序平均分成 80 组 (1~5 号, 6~10 号, ..., 396~400 号). 若第 3 组抽出的号码为 12, 则第 6 组抽出的号码应是 _____. 若用分层抽样方法, 则 35 岁以下年龄段应抽取 _____ 人.

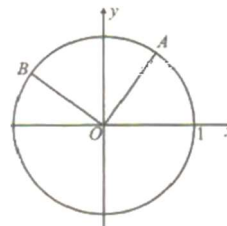
16. 一扇形的圆心角为 2 弧度, 记此扇形的周长为 C , 面积为 S , 则 $\frac{C-1}{S}$ 的最大值为 _____.

四、解答题: 17 小题 10 分, 18~22 题每小题 12 分, 共 70 分.

17. 如图, 在平面直角坐标系中, 锐角 α 和钝角 β 的顶点与原点重合, 始边与 x 轴的正半轴重合, 终边分别与单位圆交于 A, B 两点, 且 $OA \perp OB$

(1) 求 $\frac{\sin(\pi + \alpha) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)}{\cos(\pi - \beta) \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}$ 的值;

(2) 若点 A 的横坐标为 $\frac{3}{5}$, 求 $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$ 的值.



18. 城市公交车的数量太多容易造成资源的浪费, 太少又难以满足乘客的需求, 为此, 某市公交公司在某站台的 60 名候车的乘客中随机抽取 15 人, 将他们的候车时间作为样本分成 5 组, 如下表所示:

组别	一	二	三	四	五
候车时间(分钟)	[0,5)	[5,10)	[10,15)	[15,20)	[20,25)
人数	2	6	4	2	1

- 估计这 15 名乘客的平均候车时间;
- 估计这 60 名乘客中候车时间少于 10 分钟的人数;
- 若从上表第三、四组的 6 人中选 2 人作进一步的问卷调查, 求抽到的 2 人恰好来自不同组的概率.

19. 某书店销售刚刚上市的某高三数学单元测试卷, 按事先拟定的价格进行 5 天试销, 每种单价试销 1 天, 得到如下数据:

单价 x /元	18	19	20	21	22
销量 y /册	61	56	50	48	45

- 求试销 5 天的销量的方差和 y 关于 x 的回归直线方程;

$$\text{附: } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

- 预计以后的销售中, 销量与单价服从上题中的回归直线方程, 已知每册单元测试卷的成本是 10 元, 为了获得最大利润, 该单元测试卷的单价应定为多少元?

20. 已知函数 $f(x) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sqrt{3}\cos 2x, x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

- 求 $f(x)$ 的最大值和最小值;
- 若不等式 $|f(x) - m| < 2$ 在 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立, 求实数 m 的取值范围.

21. 已知 $\vec{a} = (\sin x, \cos x)$, $\vec{b} = (\sin x, k)$, $\vec{c} = (-2 \cos x, \sin x - k)$.

(1) 求 $f(x) = \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$ 的单调增区间;

(2) 若 $g(x) = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$, 求当 k 为何值时, $g(x)$ 的最小值为 $-\frac{3}{2}$.

22. 如图, 现要在一块半径为 $1m$, 圆心角为 $\frac{\pi}{3}$ 的扇形白铁片 AOB 上剪出一个平行四边形 $MNPQ$, 使点 P 在弧 AB 上, 点 Q 在 OA 上, 点 M 、 N 在 OB 上, 设 $\angle BOP = \theta$, 平行四边形 $MNPQ$ 的面积为 S

(1) 求 S 关于 θ 的函数关系式

(2) 求 S 的最大值及相应的 θ 角.

