

数 学 试 卷

由 长郡中学;衡阳八中;永州市四中;岳阳县一中;湘潭县一中;湘西州民中;
石门一中;澧县一中;益阳市一中;桃源县一中;株洲市二中;麓山国际

联合命题

炎德文化审校、制作

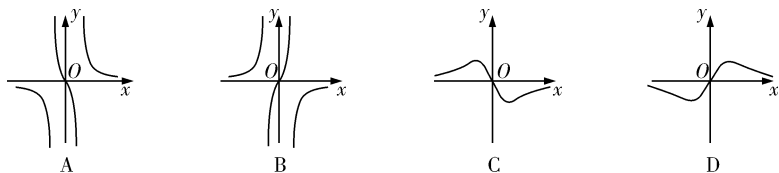
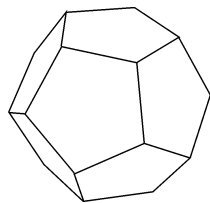
总分:150 分 时量:120 分钟

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。)

1. 已知全集 $U=A \cup B = \{x \in \mathbf{N} | -1 \leq x \leq 8\}$, $A \cap \complement_U B = \{1, 3, 5, 7\}$, 则 $B =$
 - A. $\{-1, 0, 2, 4, 6, 8\}$
 - B. $\{2, 4, 6\}$
 - C. $\{2, 4, 6, 8\}$
 - D. $\{0, 2, 4, 6, 8\}$
2. 已知复数 z 满足: $z^2 = \frac{7}{4} + 6i$ (i 为虚数单位), 且 z 在复平面内对应的点位于第三象限, 则复数 \bar{z} 的虚部为
 - A. $2i$
 - B. 3
 - C. $\frac{3}{2}$
 - D. $\frac{3}{2}i$
3. 设 $a \in \mathbf{R}$, 则“ $a \leq 2$ ”是“ $a^2 - 3a + 2 \leq 0$ ”的
 - A. 充分不必要条件
 - B. 必要不充分条件
 - C. 充要条件
 - D. 既不充分也不必要条件
4. 十二生肖作为中国民俗文化的代表, 是中国传统文化的精髓, 很多人把生肖作为春节的吉祥物, 以此来表达对新年的祝福. 某课外兴趣小组制作了一个正十二面体模型(如图), 并在十二个面分别雕刻了十二生肖的图案, 作为春节的吉祥物. 2021 年春节前, 其中 2 个兴趣小组成员将模型随机抛出, 希望能抛出牛的图案朝上(即牛的图案在最上面), 2 人各抛一次, 则恰好出现一次牛的图案朝上的概率为
 - A. $\frac{1}{12}$
 - B. $\frac{143}{144}$
 - C. $\frac{11}{72}$
 - D. $\frac{23}{144}$
5. 已知 $\sqrt{3} \sin x - \cos x = \frac{8}{5}$, 则 $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) =$
 - A. $\frac{3}{5}$
 - B. $-\frac{4}{5}$
 - C. $-\frac{7}{25}$
 - D. $-\frac{24}{25}$
6. 函数 $f(x) = \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x^2 - \cos x}$ 的图象大致为



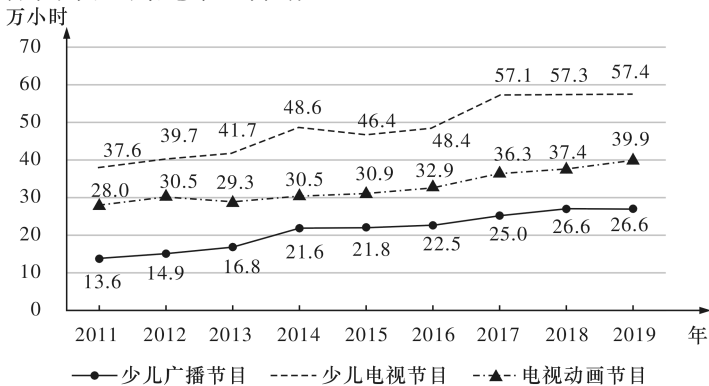
7. 消除贫困、改善民生、逐步实现共同富裕,是社会主义的本质要求,是中国共产党的重要使命,中共中央、国务院于2015年11月29日颁布了《中共中央国务院关于打赢脱贫攻坚战的决定》.某中学积极参与脱贫攻坚战,决定派6名教师到A、B、C、D、E五个贫困山区支教,每位教师去一个地方,每个地方至少安排一名教师前去支教.学校考虑到教师甲的家乡在山区A,决定派教师甲到山区A,同时考虑到教师乙与丙为同一学科,决定将教师乙与丙安排到不同山区,则不同安排方法共有
- A. 120种 B. 216种 C. 336种 D. 360种

8. 当 $x \in \mathbf{R}$ 时,不等式 $\frac{x-1}{e^x} \leq ax-1$ 恒成立,则实数 a 的取值范围为

- A. $a = \sqrt{3}$ B. $a = 2$ C. $a \geq 2$ D. $e^{\sqrt{2}-1} \leq a \leq e^{\sqrt{2}}$

二、多项选择题(本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得5分,有选错的得0分,部分选对的得2分.)

9. 为促进儿童全面发展和健康成长,我国于2011年颁布实施《中国儿童发展纲要(2011—2020年)》.儿童文化产品和活动场所更加丰富.近年来,儿童接触文化艺术和娱乐体验的途径更加多元,可获得的文化产品和服务也更加丰富.下图为2011—2019年少儿广播节目、少儿电视节目、电视动画节目播出时间.则下列结论中正确的是



- A. 2018年全国少儿电视节目播出时间比上一年增长6.4%
- B. 2011—2019年少儿广播节目、少儿电视节目、电视动画节目播出时间中电视动画节目播出时间的方差最小
- C. 2011—2019年少儿广播节目播出时间的平均数约为21万小时
- D. 2011—2019年少儿广播节目、少儿电视节目、电视动画节目播出时间均逐年增长

10. 过抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 作斜率为1的直线交抛物线 C 于 A, B 两点,则 $\left| \frac{AF}{BF} \right| =$

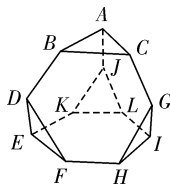
- A. $3 - 2\sqrt{2}$ B. $5 - 2\sqrt{6}$ C. $5 + 2\sqrt{6}$ D. $3 + 2\sqrt{2}$

11. 已知函数 $f(x) = -\sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right), g(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$, 则

- A. $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象关于原点对称
- B. 将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度,得到 $g(x)$ 的图象
- C. $g(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- D. $f(x)$ 的对称轴为 $x = \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

12. 截角四面体是一种半正八面体,可由四面体经过适当的截角,即截去四面体的四个顶点所产生的多面体.如图所示,将棱长为 $3a$ 的正四面体沿棱的三等分点作平行于底面的截面得到所有棱长均为 a 的截角四面体,则下列说法正确的是

A. 该截角四面体的表面积为 $7\sqrt{3}a^2$



B. 该截角四面体的体积为 $\frac{23\sqrt{2}}{12}a^3$

C. 该截角四面体的外接球表面积为 $\frac{11}{2}\pi a^2$

D. 该截角四面体中, 二面角 $A-BC-D$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$

三、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共计 20 分. 请把答案填写在答题卡相应位置上.)

13. 已知 $|\mathbf{a}|=2, \mathbf{b}=(1, \sqrt{3}), (\mathbf{a}+2\mathbf{b}) \cdot \mathbf{b}=10$, 则 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的夹角为 _____.

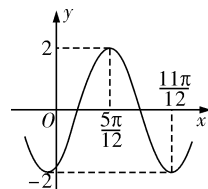
14. 若曲线 $f(x)=x^3-2x$ 在点 P 处的切线与直线 $x-y-2=0$ 平行, 则点 P 的坐标为 _____.

15. 过双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的焦点 F_1 作以焦点 F_2 为圆心的圆的切线, 其中一个切点为 $M, \triangle F_1 F_2 M$ 的面积为 c^2 , 其中 c 为半焦距, 线段 MF_1 恰好被双曲线 C 的一条渐近线平分, 则双曲线 C 的离心率为 _____.

16. 已知在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $c=5$, 点 O 为其外接圆的圆心. 已知 $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{AC}=12$, 则当角 C 取到最大值时 $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 _____.

四、解答题(本大题共 6 小题, 共计 70 分. 请在答题卡指定区域内作答. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (10 分) 已知函数 $f(x)=M\sin(\omega x+\varphi) (M>0, \omega>0, -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示.



(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $b^2=ac$, 求 $f(B)$ 的取值范围.

18. (12 分) 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, 其前 n 项和为 S_n , 若 a_3-2, a_5-2, a_7+2 成等比数列且 $d \neq 1, 2S_n = (n+1)a_n$.

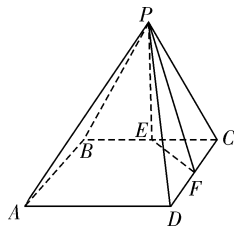
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} + 2^{-n}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $T_n, \forall n \in \mathbf{N}^*, T_n < m$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

19. (12 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是平行四边形, 侧面 $\triangle PBC$ 是等边三角形, $AD = \sqrt{2}AB, \angle BCD = 45^\circ$, 面 $PBC \perp$ 面 $ABCD$, E, F 分别为 BC, CD 的中点.

(1) 证明: 面 $PEF \perp$ 面 PAB ;

(2) 求面 PEF 与面 PAD 所成锐二面角的余弦值.



20. (12 分) 根据党的十九大规划的“扶贫同扶志、扶智相结合”精准扶贫、精准脱贫路径, 中国儿童少年基金会为了丰富留守儿童的课余文化生活, 培养良好的阅读习惯, 在农村留守儿童聚居地区捐建“小候鸟爱心图书角”. 2021 年寒假某村组织开展“小候鸟爱心图书角读书活动”, 号召全村少年儿童积极读书, 养成良好的阅读习惯. 根据统计全村少年儿童中, 平均每天阅读 1 小时以下约占 19.7%, 1-2 小时约占 30.3%, 3-4 小时约占 27.5%, 5 小时以上约占 22.5%.

(1) 将平均每天阅读 5 小时以上认为是“特别喜欢”阅读, 在活动现场随机抽取 30 名少年儿童进行阅读情况调查, 调查发现:

	父或母喜欢阅读	父母均不喜欢阅读	总计
少年儿童“特别喜欢”阅读	7	1	8
少年儿童“非特别喜欢”阅读	5	17	22
总计	12	18	30

请根据所给数据判断,能否在犯错误的概率不超过 0.005 的条件下认为“特别喜欢”阅读与父或母喜欢阅读有关?

- (2) 活动规定,每天平均阅读时长达 3 个小时的少年儿童,给予两次抽奖机会,否则只有一次抽奖机会,各次抽奖相互独立. 中奖情况如下表

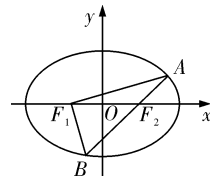
抽中奖品	价值 100 元的图书购书券	价值 50 元的图书购书券
中奖概率	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

从全村少年儿童中随机选择一名少年儿童来抽奖,设该少年儿童共获得 ξ 元图书购书券,求 ξ 的分布列和期望.

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+c)(b+d)(a+b)(c+d)}$$

$P(K^2 \geq k_0)$	0.50	0.40	0.25	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	0.455	0.708	1.323	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

21. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{1}{2}$, 过 F_2 的直线与椭圆 C 交于 A, B 两点, 若 $\triangle F_1AB$ 的周长为 8.



- (1) 求椭圆 C 的标准方程;
 (2) 设 P 为椭圆 C 上的动点, 过原点作直线与椭圆 C 分别交于点 M, N (点 P 不在直线 MN 上), 求 $\triangle PMN$ 面积的最大值.

22. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^x - \frac{1 + \ln x}{x}$, $g(x) = (a+1)e^x - 1$.

- (1) 证明: $e^x - f(x) \leq 1$;
 (2) 若 $x > 0$ 时, $g(x) \leq f(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;
 (3) 求 $f(x)$ 的最小值.