2021 新高考全国I卷参考答案与部分试题解析

答案仅供参考，以国家教育考试中心正式公布的答案为准

一、单项选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	B	A	C	C	D	B

7．若过点(a,b)可以作曲线$y=e^x$的两条切线，则（　　）

A．$e^b<a$　　B．$e^a<b$　　C．$0<a<e^b$　　D．$0<b<e^a$

【解析】（向重新提供）方法一：因为x轴是曲线$y=e^x$的渐近线，

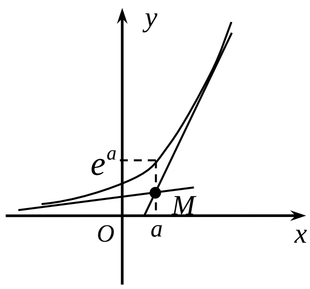


图 1

过点(a,b)可以作曲线$y=e^x$的两条切线，

则点(a,b)应在x轴的上方，即$b>0$

又曲线$y=e^x$是下凹的，要能作两条切线，

则点(a,b)应在曲线上相同横坐标的点(a,e^a)的下方，即$b<e^a$

综上，$0<b<e^a$，选 D.

方法二：曲线在点$P(x_0,e^{x_0})$处的切线方程为　$y-e^{x_0}=e^{x_0}(x-x_0)$，

由过点(a,b)得$b-e^{x_0}=e^{x_0}(a-x_0)$，问题等价于 $b=e^{x_0}(a-x_0+1)$有两个x_0解，

记$f(x)=e^x(a-x+1)$，$x\in R$，则 $f'(x)=e^x(a-x)$

所以，$f(x)$在$(-\infty,a)$上递增，在$(a,+\infty)$上递减，

$$f(x)_{\max}=f(a)=e^a,$$

又 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，$x\to+\infty$时，$f(x)\to-\infty$，

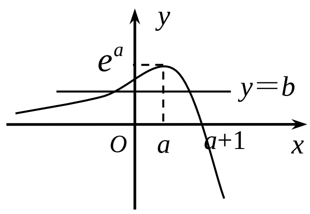


图 2

$f(x)$的大致图象如图 2 所示，要$b=f(x)$有两解，则$0<b<e^a$，所以选 D.

二、多项选择题

题号	9	10	11	12
答案	CD	AC	ACD	BD

12．在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB=AA_1=1$，点P满足$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$，其中$\lambda\in[0,1]$，$\mu\in[0,1]$，则（　　）

A．当$\lambda=1$时，ΔAB_1P的周长为定值

B．当$\mu=1$时，三棱锥$P-A_1BC$的体积是定值

C．当$\lambda=\frac{1}{2}$时，有且仅有一个点P，使得$A_1P\perp BP$

D．当$\mu=\frac{1}{2}$时，有且仅有一个点P，使得$A_1B\perp$平面AB_1P

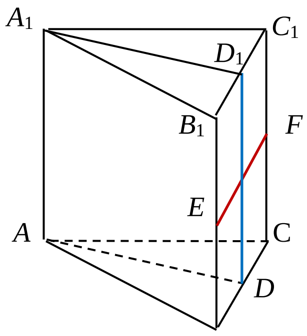


图 3

【解析】（肖润军提供）如图 3，

A 选项，当$\lambda=1$时，点P在线段CC_1上运动，ΔAB_1P的周长显然不是定值，A 不正确；

B 选项，当$\mu=1$时，点P在线段B_1C_1上运动，$V_{P-A_1BC}=V_{A_1-BCP}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{12}$；B 正确；

C 选项，当$\lambda=\frac{1}{2}$时，点P在线段DD_1上运动，显然有$A_1D\perp BD,A_1D_1\perp BD_1$， C 也不对；

D选项，当$\mu=\frac{1}{2}$时，点P在线段EF上运动，显然有$A_1B\perp AB_1$，以D为原点，分别以DA,DB,DD_1为x,y,z轴建立空间直角坐标系，则$\overrightarrow{BA_1}=(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},1),\overrightarrow{AP}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},m,\frac{1}{2}),(m\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}])$，

$\overrightarrow{BA_1}\bullet\overrightarrow{AP}=-\frac{3}{4}-\frac{m}{2}+\frac{1}{2}=0\Rightarrow m=-\frac{1}{2}$，即点 P 是 F 点时有$A_1B\perp AP$，此时，$A_1B\perp$平面$AB_1P$成立．

故答案选 BD．

三、填空题

题号	13	14	15	16
答案	1	$x=-\frac{3}{2}$	1	5，$240\left(3-\frac{n+3}{2^n}\right)$

16．某校学生在研究民间剪纸艺术时，发现剪纸时经常会沿纸的某条对称轴把纸对折．规格为$20dm\times12dm$的长方形纸，对折 1 次共可得到$10dm\times12dm$，$20dm\times6dm$两种规格的图形，它们的面积之和$S_1=240dm^2$，对折 2 次共可得到$5dm\times12dm$，$10dm\times6dm$，$20dm\times3dm$两种规格的图形，它们的面积之和$S_1=180dm^2$，以此类推．则对折 4 次共可得到不同规格的图形的种数为____________；如果对折n次，那么$\sum_{k=1}^{n}S_k=$____________．

【解析】（杨维康提供）由题知

折叠 1 次，长方形为$10cm\times12cm,20cm\times6cm$，共 2 种，$S_1=2\times\frac{240}{2^1}$；

折叠 2 次，长方形为$5cm\times12cm,10cm\times6cm,20cm\times3cm$，共 3 种，$S_2=3\times\frac{240}{2^2}$；

折叠 3 次，长方形为$\frac{5}{2}cm\times12cm,5cm\times6cm,10cm\times3cm,20cm\times\frac{3}{2}cm$，共 4 种，$S_3=4\times\frac{240}{2^3}$；

……

折叠n次，长方形为$\frac{20}{2^n}cm\times\frac{12}{2^0}cm,\frac{5}{2^{n-1}}cm\times\frac{12}{2^1}cm,\cdots,\frac{20}{2^0}cm\times\frac{12}{2^n}cm$，共$n+1$种，

$$S_n=(n+1)\times\frac{240}{2^n};$$

所以 $\sum\limits_{k=1}^{n}S_k=S_1+S_2+\cdots+S_n=2\times\frac{240}{2^1}+3\times\frac{240}{2^2}\cdots+(n+1)\times\frac{240}{2^n}=240\left(3-\frac{n+3}{2^n}\right)$.

四、解答题

17．已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1, & n\text{为奇数},\\ a_n+2, & n\text{为偶数}.\end{cases}$

⑴记$b_n=a_{2n}$，写出b_1,b_2，并求出$\{b_n\}$的通项公式；

⑵求$\{a_n\}$的前 20 项和.

【解析】（符频提供）

(1) 由题知：$a_1=1,a_2=a_1+1=2$，所以$b_1=a_2=2$；又因为 $a_3=a_2+2=4,a_4=a_3+1=5$，所以 $b_2=a_4=5$；
当 n≥2 时，$b_n=a_{2n}=a_{(2n-1)+1}=a_{2n-1}+1=a_{(2n-2)+1}+1=a_{2n-2}+3=b_{n-1}+3$,
所以 $b_n-b_{n-1}=3$，又因为 $b_1=2$，所以$\{b_n\}$是以 2 为首项，3 为公差的等差数列，
$b_n=b_1+(n-1)d=2+3(n-1)=3n-1$;

(2) 由(1)知：$a_{2n}=a_{2n-1}+1=3n-1$，所以$a_{2n}=3n-1,a_{2n-1}=3n-2,n\in N^*$,
则$S_{20}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19})+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20})$
$=\frac{(1+28)\times10}{2}+\frac{(2+29)\times10}{2}=300.$

18．某学校组织“一带一路”知识竞赛，有 A，B 两类问题．每位参加比赛的同学先在两类问题中选择一类并从中随机抽取一个问题回答，若回答错误则该同学比赛结束；若回答正确则从另一类问题中再随机抽取一个问题回答，无论回答正确与否，该同学比赛结束．A 类问题中的每个问题回答正确得 20 分，否则得 0 分；B 类问题中的每个问题回答正确得 80 分，否则得 0 分．

已知小明能正确回答 A 类问题的概为 0.8，能正确回答 B 类问题的概率为 0.6，且能正确回答问题的概率与回答次序无关.

(1) 若小明先回答 A 类问题，记X为小明的累计得分，求X的分布列；

(2) 为使累计得分的期望最大，小明应选择先回答哪类问题？并说明理由.

【解析】（杨生华、舒巧云提供）

(1) X 的所有可能取值为 0, 20, 100.

$P(X=0)=1-0.8=0.2$；$P(X=20)=0.8\times(1-0.6)=0.32$；$P(X=100)=0.8\times0.6=0.48.$

X 的分布列为

X	0	20	100
P	0.2	0.32	0.48

(2) 由(1)，先回答 A 类问题的得分期望为 $E(X)=0\times0.2+20\times0.32+100\times0.48=54.4$；

若小明先回答 B 类问题，记Y为小明的累计得分，则Y的所有可能取值为 0, 80, 100，

$P(Y=0)=0.4,\ P(Y=80)=0.6\times0.2=0.12$，$P(Y=100)=0.6\times0.8=0.48$，

$E(Y)=0\times0.4+80\times0.12+100\times0.48=57.6$，

因为 $E(Y)>E(X)$，所以先回答 B 类问题累计得分的期望最大.

【点评】该题主要考查离散型随机变量的分布列与期望，难度不大，学生只要分情况求出分布列与期望即可.

19. 记ΔABC的内角 A,B,C 的对边分别为a,b,c，若$b^2=ac$，点 D 在边 AC 上，$BD\sin\angle ABC=a\sin C$.

（1）证明：$BD=b$；

（2）若$AD=2CD$，求$\cos\angle ABC$.

【解析】（朱静提供）

（1）由正弦定理得

$BD\sin\angle ABC=a\sin C\Leftrightarrow BD\cdot b=ac$，又已知 $b^2=ac$，$\therefore$ $BD=b$.

（2）**方法一：**$\because AD=2CD,$ 又由（1）知 BD=b，如图 4，

令 $CD=k$，则 $AD=2k$，$BD=3k$，$ac=9k^2$ …①

在△ABD 中，由余弦定理知

$c^2=4k^2+9k^2-2\cdot2k\cdot3k\cdot\cos\alpha$ …②

在△BCD 中，由余弦定理知

$a^2=k^2+9k^2-2\cdot k\cdot3k\cdot\cos\beta$ …③

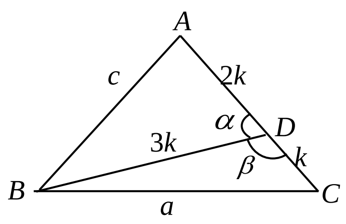


图 4

因为 $\cos\beta=-\cos\alpha$，$\therefore$由②③可知，$2a^2+c^2=33k^2$

又由①得 $a^2c^2=81k^4$，$\therefore$ $2a^2+\dfrac{81k^4}{a^2}-33k^2=0$

$$\therefore\begin{cases}a=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}k\\ c=\sqrt{6}k\end{cases}\ 或\ \begin{cases}a=\sqrt{3}k\\ c=3\sqrt{3}k\end{cases}(舍，理由是c-a>b)$$

在△ABC 中由余弦定理知，$\cos\angle ABC=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{7}{12}$.

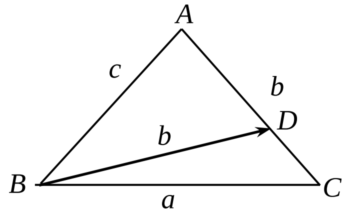


图 5

方法二：$\because AD=2CD$，如图 5 $\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$，

由$|\overrightarrow{BD}|=b$得 $b^2=\dfrac{1}{9}c^2+\dfrac{4}{9}a^2+\dfrac{4}{9}ac\cos\angle ABC$ $\cdots$①

又在△ABC 中由余弦定理知 $\cos\angle ABC=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ $\cdots$②

由①②可得$6a^2+3c^2=11b^2$，又$b^2=ac$，$\therefore 6a^2-11ac+3c^2=0$

即$(2a-3c)(3a-c)=0$，$\therefore a=\dfrac{3}{2}c或a=\dfrac{1}{3}c$

代入②可得$\cos\angle ABC=\dfrac{7}{12}$或$\dfrac{7}{6}$(舍)，$\therefore\cos\angle ABC=\dfrac{7}{12}$.

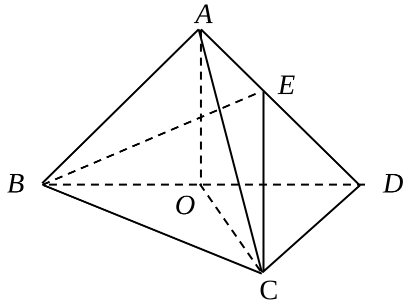
20. 如图，在三棱锥$A-BCD$中，平面$ABD\perp$平面$BCD, AB=AD, O$为BD的中点.

（1）证明：$OA\perp CD$;

(2) 若ΔOCD是边长为 1 的等边三角形，点E在棱AD上，

$DE=2EA$，且二面角$E-BC-D$的大小为45°，

求三棱锥$A-BCD$的体积.



【解析】（肖思琪提供）

（1）证明：$\because$ $AB=AD$, O为BD的中点，$\therefore OA\perp BD$

又 面$ABD\perp$面BCD，且面$ABD\cap$面$BCD=BD$

$\therefore OA\perp$面BCD $\because CD\subset$面BCD，$\therefore OA\perp CD$

（2）**方法一：**由已知可得$OC=CD=OD=1, \angle ODC=60^\circ$，且$O$为$BD$的中点$\therefore BD=2$

由余弦定理$BC^2=BD^2+CD^2-2BD\cdot CD\cdot\cos 60^\circ=\sqrt{3}$，$\therefore BC\perp CD$

在OD, CB上分别取F点，G点，满足$DF=2FO$，$CB=3CG$,连接EG

$\because\dfrac{DE}{DA}=\dfrac{DF}{DO}=\dfrac{2}{3}$，$\therefore$ $EF//OA, EF=\dfrac{2}{3}OA$，$EF\perp$面$BCD$

同理可证$FG//DC$, $\therefore FG\perp CB, FG=\dfrac{2}{3}DC=\dfrac{2}{3}$,

$\because FG \perp CB, EF \perp CB, EF \cap FG = F$，$\therefore CB \perp$面$EFG$，$\therefore CB \perp EG$

由二面角定义可得，$\angle EGF = 45^{\circ}$，$\therefore GF = EF = \dfrac{2}{3}$，$\therefore OA = 1$

$V_{A-BCD} = \dfrac{1}{3} AC \cdot CD \cdot \dfrac{1}{2} \cdot OA = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

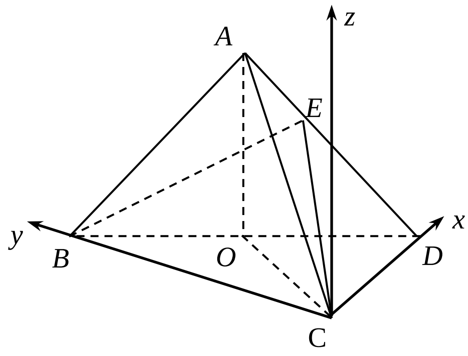


图 6

方法二：由已知可得$OC = CD = OD = 1, \angle ODC = 60^{\circ}$

且O为BD的中点，$\therefore BD = 2$

由余弦定理$BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2BD \cdot CD \cdot \cos 60^{\circ} = \sqrt{3}$

$\therefore BC \perp CD$

如图 6，以CD, CB分别为x, y轴，过C点作OA的平行线为z轴建立空间直角坐标系．则$C(0,0,0)$，$D(1,0,0), B(0,\sqrt{3},0)$，

设$A(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, m)$，由$\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$，得$E(\dfrac{2}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{2m}{3})$，　$\overrightarrow{BC} = (0,-\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{CE} = (\dfrac{2}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{2m}{3})$，

设$\vec{m} = (x, y, z)$为平面BCE的法向量，

则有$\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{CE} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{3}y = 0 \\ \dfrac{2}{3}x + \dfrac{\sqrt{3}}{3}y + \dfrac{2m}{3}z = 0 \end{cases}$，取　$\vec{m} = (1, 0, -\dfrac{1}{m})$

易知面BCD的法向量为$\vec{n} = (0,0,1)$，由二面角$E - BC - D$的大小为45°得

$$\cos 45^{\circ} = \left| \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} \right| = \left| \frac{(1, 0, -\frac{1}{m}) \cdot (0, 0, 1)}{\sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} \cdot 1} \right| \Rightarrow m = 1$$，所以 $V_{A-BCD} = \dfrac{1}{3} AC \cdot CD \cdot \dfrac{1}{2} \cdot OA = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

21．在平面直角坐标系xOy中，已知点$F_1(-\sqrt{17}, 0), F_2(\sqrt{17}, 0)$，点$M$满足$|MF_1| - |MF_2| = 2$，记$M$的轨迹为$C$.

⑴ 求C的方程；

⑵ 设点T在直线$x = \dfrac{1}{2}$上，过T的两条直线分别交C于A、B两点和P、Q两点，且$|TA| \cdot |TB| = |TP| \cdot |TQ|$，求直线$AB$的斜率与直线$PQ$的斜率之和.

【解析】（杨维康、陈朦提供）

⑴易得的方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{16}=1(x>0)$.

⑵**方法一**：设直线 AB 的方程为 l_{AB}：$y=kx+m$，A、B 两点的坐标为 $A(x_A,y_A),B(x_B,y_B)$

联立方程 $\begin{cases} y=kx+m \\ x^2-\dfrac{y^2}{16}=1 \end{cases} \Rightarrow (16-k^2)x^2-2kmx-(m^2+16)=0$

由 $\Delta=4k^2m^2+4(16-k^2)(m^2+16)>0$ 得 $k^2-m^2<16$

所以，$x_A+x_B=\dfrac{2km}{16-k^2}$，$x_A\cdot x_B=-\dfrac{m^2+16}{16-k^2}$

又 $|TA|=\sqrt{1+k^2}\left|x_A-\dfrac{1}{2}\right|=\sqrt{1+k^2}\left(x_A-\dfrac{1}{2}\right)$，$|TB|=\sqrt{1+k^2}\left|x_B-\dfrac{1}{2}\right|=\sqrt{1+k^2}\left(x_B-\dfrac{1}{2}\right)$

则 $|TA|\cdot|TB|=(1+k^2)\left[x_A\cdot x_B-\dfrac{1}{2}(x_A+x_B)+\dfrac{1}{4}\right]=(1+k^2)\dfrac{m^2+km+\dfrac{1}{4}k^2+12}{k^2-16}$

设直线 AB 过点 $T\left(\dfrac{1}{2},t\right)$，则 $t=\dfrac{1}{2}k+m$，即 $m=t-\dfrac{1}{2}k$.

所以 $m^2+km+\dfrac{1}{4}k^2+12=\left(t-\dfrac{1}{2}k\right)^2+k\left(t-\dfrac{1}{2}k\right)+\dfrac{1}{4}k^2+12=t^2+12$

即 $|TA|\cdot|TB|=(1+k^2)\dfrac{t^2+12}{k^2-16}$

设直线 PQ 的斜率为 k_1，同理可得 $|TP|\cdot|TQ|=(1+k_1^{\,2})\dfrac{t^2+12}{k_1^{\,2}-16}$

由 $|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$ 得 $\dfrac{1+k^2}{k^2-16}=\dfrac{1+k_1^{\,2}}{k_1^{\,2}-16}$，又 $k\neq k_1$，所以 $k=-k_1$，即 $k+k_1=0$.

方法二：设过点 T 的直线的参数方程为：$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}+t\cos\theta \\ y=m+t\sin\theta \end{cases}$，$0<\theta<\pi$

代入曲线 C 的方程得：$(\dfrac{1}{4}+t^2\cos^2\theta+t\cos\theta)-\dfrac{1}{16}(m^2+t^2\sin^2\theta+2mt\sin\theta)=1$

化简得 $(\cos^2\theta-\frac{1}{16}\sin^2\theta)t^2+(\cos\theta-\frac{2m\sin\theta}{16})t-\frac{m^2}{16}-\frac{3}{4}=0$，

即 $(1-\frac{17}{16}\sin^2\theta)t^2+(\cos\theta-\frac{2m\sin\theta}{16})t-\frac{m^2}{16}-\frac{3}{4}=0$，由题意，$1-\frac{17}{16}\sin^2\theta\neq0$

所以 $t_1\cdot t_2=\dfrac{\frac{m^2}{16}+\frac{3}{4}}{\frac{17}{16}\sin^2\theta-1}$

设直线 AB 的倾斜角为 α，直线 PQ 的倾斜角为 β，$\alpha,\beta\in(0,\pi)$ 且 $\alpha\neq\beta$ 由直线的参数方程中 t 的几何意义可知：

$|TA|\cdot|TB|=t_1\cdot t_2=\dfrac{\frac{m^2}{16}+\frac{3}{4}}{\frac{17}{16}\sin^2\alpha-1}$，　$|TP|\cdot|TQ|=\dfrac{\frac{m^2}{16}+\frac{3}{4}}{\frac{17}{16}\sin^2\beta-1}$

又 $|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$，则 $\dfrac{\frac{m^2}{16}+\frac{3}{4}}{\frac{17}{16}\sin^2\alpha-1}=\dfrac{\frac{m^2}{16}+\frac{3}{4}}{\frac{17}{16}\sin^2\beta-1}$，得 $\frac{17}{16}\sin^2\alpha-1=\frac{17}{16}\sin^2\beta-1$

所以 $\sin^2\alpha=\sin^2\beta$，由 $\alpha,\beta\in(0,\pi)$ 得 $\sin\alpha=\sin\beta$，又 $\alpha\neq\beta$，所以 $\alpha+\beta=\pi$，

即 $\tan\alpha+\tan\beta=\tan\alpha+\tan(\pi-\alpha)=0$，所以，直线 AB 与直线 PQ 的斜率之和为 0.

22．已知函数 $f(x)=x(1-\ln x)$．

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）设 a，b 为两个不相等的正数，且 $b\ln a-a\ln b=a-b$，证明：$2<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<e$．

【解析】（高用提供）

（1）$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=-\ln x$，则当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$．所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减．

（2）由 $b\ln a-a\ln b=a-b$，得 $b(1+\ln a)=a(1+\ln b)$，进而 $\frac{1}{a}(1+\ln a)=\frac{1}{b}(1+\ln b)$，

即 $\frac{1}{a}(1-\ln\frac{1}{a})=\frac{1}{b}(1-\ln\frac{1}{b})$．令 $f(x)=t$，则 $\frac{1}{a},\frac{1}{b}$ 为方程 $f(x)=t$ 的两个根．

由（1）知，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取极大值．又

$x \to 0$时，$f(x) \to 0$，$f(e)=0$，则方程$f(x)=t$的两个根在区间$(0,e)$内.

不妨设$0<\frac{1}{a}<1<\frac{1}{b}<e$，则$2-\frac{1}{a}>1$.

要证$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>2$，即证$\frac{1}{b}>2-\frac{1}{a}$，由于$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，则只要证$f(\frac{1}{b})<f(2-\frac{1}{a})$，

又$f(\frac{1}{a})=f(\frac{1}{b})$，则只需证$f(\frac{1}{a})<f(2-\frac{1}{a})$.

构造函数$F(x)=f(x)-f(2-x)$，$x\in(0,1)$.

$F'(x)=f'(x)+f'(2-x)=-\ln x-\ln(2-x)=-\ln(2x-x^2)$，易知$x\in(0,1)$时，$0<2x-x^2<1$，

则$F'(x)>0$，所以$F(x)$在$(0,1)$上单调递增，从而$F(x)<F(1)=0$，故原不等式$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>2$得证.

另一方面，由$0<\frac{1}{a}<1<\frac{1}{b}<e$，则$e-\frac{1}{a}>1$.

要证$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<e$，即证$\frac{1}{b}<e-\frac{1}{a}$，由于$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，则只要证$f(\frac{1}{b})>f(e-\frac{1}{a})$，

又$f(\frac{1}{a})=f(\frac{1}{b})$，则只需证$f(\frac{1}{a})>f(e-\frac{1}{a})$.

构造函数$G(x)=f(x)-f(e-x)$，$x\in(0,1)$.

$G'(x)=f'(x)+f'(e-x)=-\ln x-\ln(e-x)=-\ln(ex-x^2)$，由$ex-x^2<1$，解得$0<x<\frac{e-\sqrt{e^2-4}}{2}$，所以$G(x)$在$(0,\frac{e-\sqrt{e^2-4}}{2})$上单调增，在$(\frac{e-\sqrt{e^2-4}}{2},1)$单调递减.

因为$x\in(0,\frac{e-\sqrt{e^2-4}}{2})$时，$G(x)>0$，$x\in(\frac{e-\sqrt{e^2-4}}{2},1)$时，$G(x)>G(1)=f(1)-f(e-1)>0$，所以$x\in(0,1)$时，$G(x)>0$，从而原不等式$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<e$得证.

综上，不等式$2<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<e$成立.

【试题评析】该题初看并不像极值点偏移问题，或者说不能直接看出来，难点是对等式

$b\ln a - a\ln b = a - b$的处理，通过代数变形，最终得到$\frac{1}{a}(1-\ln\frac{1}{a}) = \frac{1}{b}(1-\ln\frac{1}{b})$，联系题设函数$f(x)$及其极值点$x=1$，便看出该题的端倪——极值点偏移！