★启用前注意保密

2023 年普通高等学校招生全国统一考试模拟测试（一）

数 学

本试卷共 6 页，22 小题，满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项： 1. 答卷前，考生务必将自己所在的市（县、区）、学校、班级、姓名、考场号、座位号和考生号填写在答题卡上，将条形码横贴在每张答题卡右上角“条形码粘贴处”。

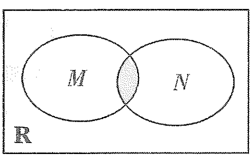
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔在答题卡上将对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

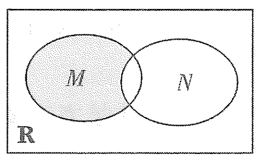
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先画掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

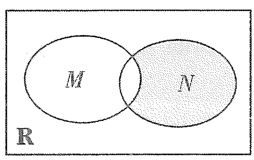
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

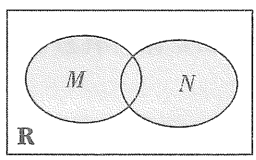
一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M=\{x\mid x(x-2)<0\}$，$N=\{x\mid x-1<0\}$，则下列 Venn 图中阴影部分可以表示集合 $\{x\mid 1\leqslant x<2\}$ 的是

A. 

B. 

C. 

D. 

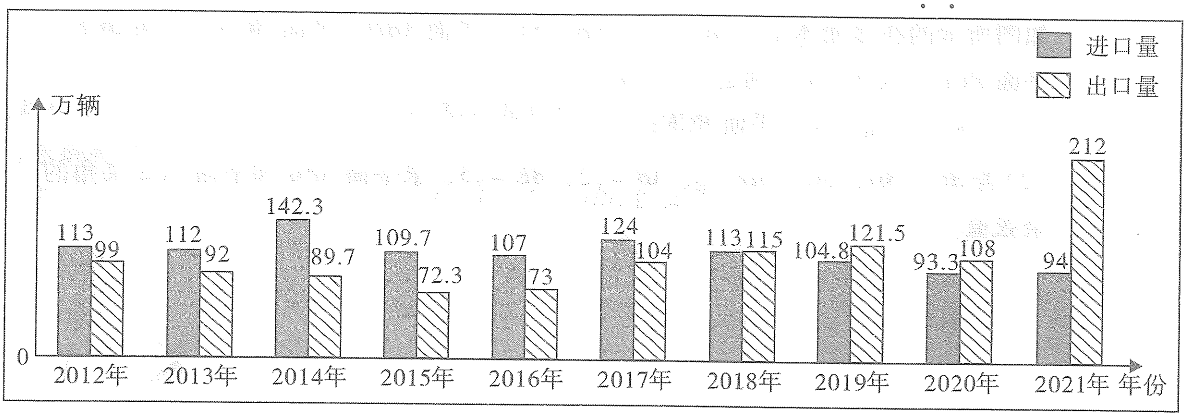
2. 已知一个圆锥和圆柱的底面半径和高分别相等，若圆锥的轴截面是等边三角形，则这个圆锥和圆柱的侧面积之比为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\sqrt{3}$

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x\geqslant 0,\\ -\left(\frac{1}{2}\right)^x, & x<0,\end{cases}$ 若 $f(a)<f(6-a)$，则实数 a 的取值范围是

A. $(-3, +\infty)$　　B. $(-\infty, -3)$　　C. $(3, +\infty)$　　D. $(-\infty, 3)$

4. 如图所示是中国 2012—2021 年汽车进、出口量统计图，则下列结论错误的是



A. 2012—2021 年中国汽车进口量和出口量都是有增有减的

B. 从 2018 年开始，中国汽车的出口量大于进口量

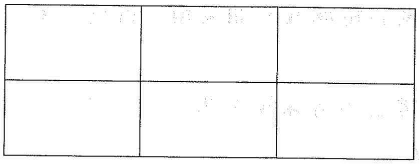
C. 2012—2021 年中国汽车出口量的第 60 百分位数是 106 万辆

D. 2012—2021 年中国汽车进口量的方差大于出口量的方差

5. 在复平面内，已知复数 z 满足 $|z-1|=|z+\mathrm{i}|$（i 为虚数单位），记 $z_0=2+\mathrm{i}$ 对应的点为点 Z_0，z 对应的点为点 Z，则点 Z_0 与点 Z 之间距离的最小值为

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　D. $2\sqrt{2}$

6. 如图，在两行三列的网格中放入标有数字 1，2，3，4，5，6 的六张卡片，每格只放一张卡片，则“只有中间一列两个数字之和为 5”的不同的排法有



A. 96 种　　B. 64 种　　C. 32 种　　D. 16 种

7. 已知双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$，点 B 的坐标为 $(0,\ b)$，若 C 上的任意一点 P 都满足 $|PB|\geqslant b$，则 C 的离心率取值范围是

A. $\left(1,\ \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right]$　　B. $\left[\dfrac{\sqrt{5}+1}{2},\ +\infty\right)$

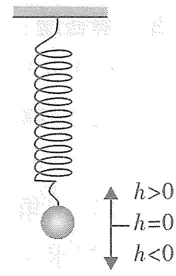
C. $(1,\ \sqrt{2}]$　　D. $[\sqrt{2},\ +\infty)$

8. 水平桌面上放置了 4 个半径为 2 的小球，4 个小球的球心构成正方形，且相邻的两个小球相切. 若用一个半球形的容器罩住四个小球，则半球形容器内壁的半径的最小值为

A. 4　　B. $2\sqrt{2}+2$　　C. $2\sqrt{3}+2$　　D. 6

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. 如图，弹簧下端悬挂着的小球做上下运动（忽略小球的大小），它在 t(s)时刻相对于平衡位置的高度 h(cm)可以由 $h=2\sin\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{4}\right)$ 确定，则下列说法正确的是



A. 小球运动的最高点与最低点的距离为2 cm

B. 小球经过4 s往复运动一次

C. $t\in(3,5)$ 时小球是自下往上运动

D. 当 $t=6.5$ 时，小球到达最低点

10. 在四棱锥 $S-ABCD$ 中，$SD\perp$ 平面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 是正方形，若 $SD=AD$，则

A. $AC\perp SD$　　　　B. AC 与 SB 所成角为$60°$

C. BD 与平面 SCD 所成角为$45°$　　　　D. BD 与平面 SAB 所成角的正切值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$

11. 已知抛物线 E：$y^2=8x$ 的焦点为 F，点 F 与点 C 关于原点对称，过点 C 的直线 l 与抛物线 E 交于 A，B 两点（点 A 和点 C 在点 B 的两侧），则下列命题正确的是

A. 若 BF 为$\triangle ACF$ 的中线，则 $|AF|=2|BF|$

B. 若 BF 为$\angle AFC$ 的角平分线，则 $|AF|=6$

C. 存在直线 l，使得 $|AC|=\sqrt{2}|AF|$

D. 对于任意直线 l，都有 $|AF|+|BF|>2|CF|$

12. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$，对于给定集合 A，若 $\forall x_1$，$x_2\in\mathbf{R}$，当 $x_1-x_2\in A$ 时都有 $f(x_1)-f(x_2)\in A$，则称 $f(x)$ 是“A封闭”函数. 则下列命题正确的是

A. $f(x)=x^2$ 是“$[-1,1]$封闭”函数

B. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 都是“$\{0\}$封闭”函数

C. 若 $f(x)$ 是“$\{1\}$封闭”函数，则 $f(x)$ 一定是“$\{k\}$封闭”函数（$k\in\mathbf{N}^*$）

D. 若 $f(x)$ 是“$[a,b]$封闭”函数（a，$b\in\mathbf{N}^*$），则 $f(x)$ 不一定是“$\{ab\}$封闭”函数

三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分。请把答案填在答题卡的相应位置上。

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{a}=0$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为________.

14. 在平面直角坐标系中，等边三角形 ABC 的边 AB 所在直线斜率为 $2\sqrt{3}$，则边 AC 所在直线斜率的一个可能值为________.

15. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递减，$f(x+2)$ 为偶函数，若 $f(x)=m$ 在 $[0,12]$ 上恰好有4个不同的实数根 x_1，x_2，x_3，x_4，则 $x_1+x_2+x_3+x_4=$________.

16. 已知动圆 N 经过点 $A(-6,0)$ 及原点 O，点 P 是圆 N 与圆 M：$x^2+(y-4)^2=4$ 的一个公共点，则当 $\angle OPA$ 最小时，圆 N 的半径为________.

四、解答题：本大题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10分)

在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\cos 2A+\cos 2B-\cos 2C=1-2\sin A\sin B$.

(1)求角 C 的大小；

(2)求 $\sin A+\sin B+\sin C$ 的取值范围.

18. (12分)

已知各项都是正数的数列 $\{a_n\}$，前 n 项和 S_n 满足 $a_n^2=2S_n-a_n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

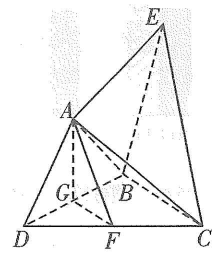
(2)记 P_n 是数列 $\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$ 的前 n 项和，Q_n 是数列 $\left\{\dfrac{1}{a_{2^{n-1}}}\right\}$ 的前 n 项和. 当 $n\geqslant 2$ 时，试比较 P_n 与 Q_n 的大小.

19. (12 分)

如图所示的在多面体中，$AB=AD$，$EB=EC$，平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，平面 $BCE\perp$ 平面 BCD，点 F，G 分别是 CD，BD 中点.

(1)证明：平面 $AFG//$ 平面 BCE；

(2)若 $BC\perp BD$，$BC=BD=2$，$AB=\sqrt{2}$，$BE=\sqrt{5}$，求平面 AFG 和平面 ACE 夹角的余弦值.



20. (12 分)

某商场为了回馈广大顾客，设计了一个抽奖活动，在抽奖箱中放 10 个大小相同的小球，其中 5 个为红色，5 个为白色. 抽奖方式为：每名顾客进行两次抽奖，每次抽奖从抽奖箱中一次性摸出两个小球. 如果每次抽奖摸出的两个小球颜色相同即为中奖，两个小球颜色不同即为不中奖.

(1)若规定第一次抽奖后将球放回抽奖箱，再进行第二次抽奖，求中奖次数 X 的分布列和数学期望.

(2)若规定第一次抽奖后不将球放回抽奖箱，直接进行第二次抽奖，求中奖次数 Y 的分布列和数学期望.

(3)如果你是商场老板，如何在上述问两种抽奖方式中进行选择？请写出你的选择及简要理由.

21. (12 分)

已知点 A，点 B 和点 C 为椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上不同的三个点. 当点 A，点 B 和点 C 为椭圆的顶点时，$\triangle ABC$ 恰好是边长为 2 的等边三角形.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)若 O 为原点，且满足$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，求$\triangle ABC$ 的面积.

22. (12 分)

已知函数$f(x)=xe^{x+1}$.

(1)求$f(x)$的极值；

(2)当 $x>0$ 时，$f(x)\geqslant(a+1)x+\ln x+2$，求实数 a 的取值范围.