10月联考复习卷2

一、单选题（本大题共8小题，共40.0分。在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 复数$\dfrac{i}{1-i}$的实部为 (　)

A. $-\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. -1　　D. 1

2. 下列四组函数中，表示同一函数的是(　)

A. $f(x)=x$，$g(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2$

B. $f(x)=x^2$，$g(x)=(x+1)^2$

C. $f(x)=\sqrt{x^2}$，$g(x)=|x|$

D. $f(x)=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}$，$g(x)=\sqrt{x^2-1}$

3. 已知函数$f(x)=x-\sqrt{x}(x>0)$，$g(x)=x+e^x$，$h(x)=x+\ln x$的零点分别为x_1，x_2，x_3，则．(　)

A. $x_1<x_2<x_3$　　B. $x_2<x_1<x_3$　　C. $x_2<x_3<x_1$　　D. $x_3<x_1<x_2$

4. 已知$\cos(\dfrac{\pi}{4}-\alpha)=\dfrac{3}{5}$，$\sin(\dfrac{5\pi}{4}+\beta)=-\dfrac{12}{13}$，$\alpha\in(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4})$，$\beta\in(0,\dfrac{\pi}{4})$，则$\sin(\alpha+\beta)$的值为．(　)

A. $-\dfrac{16}{65}$　　B. $\dfrac{56}{65}$　　C. $-\dfrac{63}{65}$　　D. $\dfrac{33}{65}$

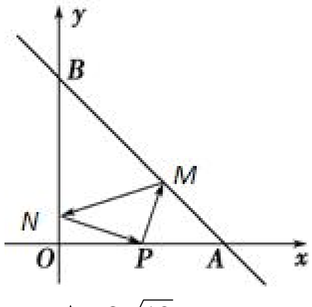
5. 已知正实数x，y满足$4x+3y=4$，则$\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{1}{3y+2}$的最小值为 (　)

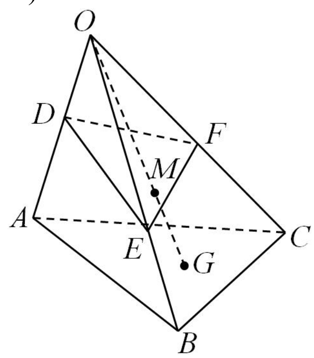
A. $\dfrac{3}{8}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　B. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　C. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　D. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

6. 某学校有男生400人，女生600人·为调查该校全体学生每天睡眠时间，采用分层抽样的方法抽取样本，计算得男生每天睡眠时间的均值为7.5小时，方差为1，女生每天睡眠时间的均值为7小时，方差为0.5.若男、女样本量按比例分配，则可估计总体方差为(　)

A. 0.45　　B. 0.62　　C. 0.7　　D. 0.76

7. 如图，已知两点$A(4,0)$，$B(0,4)$，从点$P(2,0)$射出的光线经直线AB反射后射到直线OB上，再经直线OB反射后射到P点，则光线所经过的路程$|\mathrm{PM}|+|\mathrm{MN}|+|\mathrm{NP}|$等于 (　)





A. $2\sqrt{10}$　　B. 6　　C. $3\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{5}$

8. 如图，在三棱锥$O-ABC$中，点G为底面$\triangle ABC$的重心，点M是线段OG上靠近点G的三等分点，过点M的平面分别交棱OA，OB，OC于点D，E，F，若$\overrightarrow{OD}=k\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OE}=m\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OF}=n\overrightarrow{OC}$，则$\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=$ (　)

A. $\dfrac{13}{3}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $\dfrac{3}{2}$　　D. $\dfrac{9}{2}$

二、多选题（本大题共4小题，共20.0分。在每小题有多项符合题目要求）

9. $PM2.5$是指大气中直径小于或等于2.5微米的颗粒物，也称为可入肺颗粒物·某地8月1日到10日的$PM2.5$日均值（单位：$\mu g/m^3$）分别为36，32，38，34，32，88，42，36，30，32，则关于这10天中$PM2.5$日均值的说法正确的是（　）

A. 众数为32　　B. 第80百分位数是38

C. 平均数是40　　D. 前4天的方差比后4天的方差小

10. 给出下列命题，其中正确的命题有（　）

A. 函数$f(x)=\log_a(2x\text{-}1)\text{-}1$的图象过定点$(1,0)$

B. 已知函数$f(x)$是定义在R上的偶函数，当$x\leqslant 0$时$f(x)=x(x+1)$，则$f(x)$的解析式为$f(x)=x^2\text{-}|x|$

C. 若$\log_a\dfrac{1}{2}>1$，则a的取值范围是$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

D. 若$2^{-x}\text{-}2^{y}>\ln x\text{-}\ln(\text{-}y)(x>0,y<0)$，则$x+y<0$

11. 设有一组圆$C_k:(x-2k+1)^2+(y-k)^2=1$，则下列说法正确的是（　）

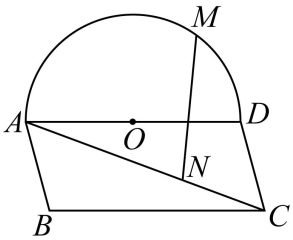
A. 这组圆的半径均为1

B. 直线$2x-y+2=0$平分所有的圆C_k

C. 直线$2x-3y+1=0$被圆C_k截得的弦长相等

D. 存在一个圆C_k与x轴和y轴均相切

12. 如图，半圆面$O\perp$平面$ABCD$，四边形$ABCD$是矩形，且$AB=1$，$AD=2$，M,N分别是$\overset{\frown}{AD}$，线段AC上的动点（不含端点），且$MN=1$，则下列说法正确的有（　）



A. 平面$CMA\perp$平面CMD

B. 存在M,N使得$AD\perp MN$

C. N的轨迹长度为$\sqrt{5}-1$

D. 直线MN与平面$ABCD$所成角的最大值的正弦值为$\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

三、填空题（本大题共4小题，共20.0分）

13. 已知$A=\left\{x\middle|x^2+2x-3>0\right\}$，$B=\left\{x\middle|x^2-2ax-1\leqslant 0,a>0\right\}$，若$A\bigcap B$中恰含有一个整数，则实数$a$的取值范围是_____.

14. 已知函数$f(x)=2\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{4})(\omega>0)$，若在区间$(0,\pi)$上有两个不同的$x$使得$f(x)+\sqrt{2}=0$，则$\omega$的取值范围是_____.

15. 乙甲、乙两同学参加“建党一百周年”知识竞赛，甲、乙获得一等奖的概率分别为$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{5}$，获得二等奖的概率分别为$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{3}{5}$，甲、两同学是否获奖相互独立，则甲乙两人至少有1人获奖的概率为_____.

16. 设$m\in R$，过定点M的直线$l_1:x+my-3m-1=0$与过定点N的直线$l_2:mx-y-3m+1=0$相交于点P，线段AB是圆$C:(x+1)^2+(y+1)^2=4$的一条动弦，且$|AB|=2\sqrt{2}$.给出下列四个结论：

①l_1一定垂直于l_2;

②$|PM|+|PN|$的最大值为4;

③点P的轨迹方程为$(x-2)^2+(y-2)^2=1$;

④$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$的最小值为$4\sqrt{2}$．

其中所有正确结论的序号是_____．

四、解答题（本大题共 6 小题，共 72.0 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17. （本小题12.0分）

已知$f(x)=\log_2(4^x+1)+ax$是偶函数．

(1) 求a的值；

(2) 设$g(x)=2^{2x}+2^{-2x}+m\cdot 2^{f(x)}$的最小值为$-3$，则实数$m$的值．

18. （本小题12.0分）

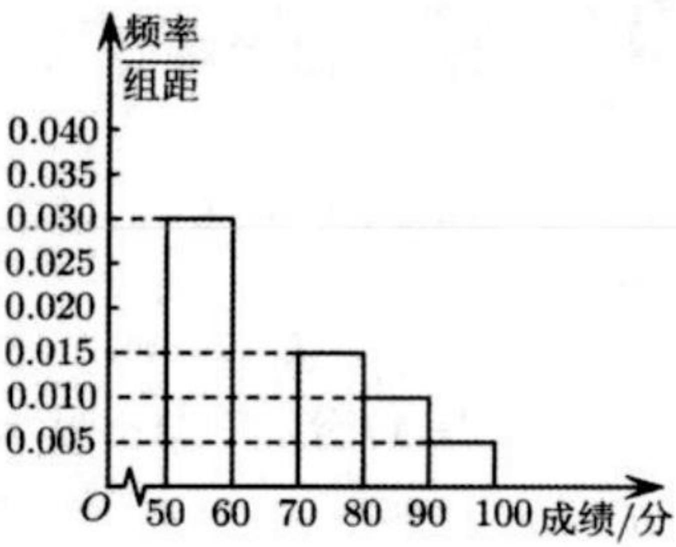
记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\dfrac{1-sinA}{cosA}=\dfrac{1-cos2B}{sin2B}$．

(1) 求$C-B$的值；

(2) 若$\triangle ABC$的外接圆的半径为r，求$\dfrac{a^2+b^2}{r^2\sin^2 C}$的最小值．

19. （本小题12.0分）

2022年4月16日，神舟十三号载人飞船返回舱在东风着陆场预定区域成功着陆，航天员翟志刚，王亚平，叶光富顺利出舱，神舟十三号载人飞行任务圆满完成·为纪念中国航天事业所取得的成就，发扬并传承中国航天精神，某市随机抽取1000名学生进行了航天知识竞赛并记录得分（满分：100分），将学生的成绩整理后分成五组，从左到右依次记为$[50,60)$，$[60,70)$，$[70,80)$，$[80,90)$，$[90,100]$，并绘制成如图所示的频率分布直方图．



(1) 请补全频率分布直方图并估计这1000名学生成绩的平均数和计算80%分位数（求平均值时同一组数据用该组区间的中点值作代表，80%分位数小数点后面保留两位有效数字）;

(2) 现从以上各组中采用分层抽样的方法抽取 200 人·若第三组中被抽取的学生成绩的平均数与方差分别为 72 分和 1，第四组中被抽取的学生成绩的平均数与方差分别为 87 分和 2，求这 200 人中分数在区间 $[70,90)$ 的学生成绩的方差．

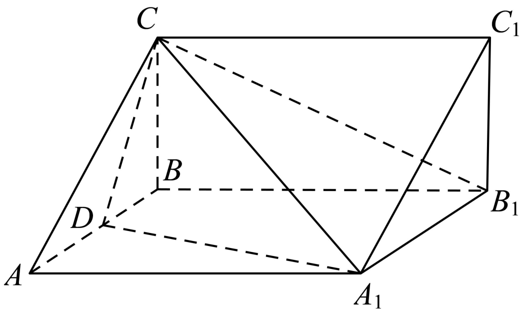
20. （本小题 12.0 分）

已知圆心为 C 的圆经过点 $A(1,0)$ 和 $B(-1,-2)$，且圆心 C 在直线 l:x-y+1=0 上·

(1) 求圆 C 的标准方程；(2) 若线段 PD 的端点 D 的坐标是 $(4,3)$，端点 P 在圆 C 上运动，求 PD 的中点 M 的轨迹方程．

21. （本小题 12.0 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$ 平面 ABC，$AB=2\sqrt{3}$，$AC=BB_1=2BC=4$，且 D 为线段 AB 的中点，连接 A_1D， CD， B_1C．



(1) 证明： $BC\perp A_1D$；

(2) 求平面 B_1A_1C 与平面 A_1CD 夹角的余弦值．

22. （本小题 12.0 分）

已知圆 $C:(x+3)^2+(y-1)^2=7$．

① 由点 $O(0,0)$ 向圆 C 引切线 OA， OB， A， B 为切点，求直线 AB 方程；

② 直线 $l:x-y-2=0$ 上的点 P 向圆引切线 PA， PB， A， B 为切点，判断直线 AB 是否过定点，若过定点，请求出定点坐标，否则说明理由．

答案和解析

1.【答案】 A

【解析】【分析】

本题考查了复数的运算，重点是除法运算，复数的概念，属于基础题.

根据复数的除法运算，分子分母都乘以分母的共轭复数，然后再化简，由复数的概念得实部 .

【解答】

解：$\dfrac{i}{1-i}=\dfrac{i\cdot(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{i+i^2}{1-(-1)}=\dfrac{-1+i}{2}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$，

故实部为 $-\dfrac{1}{2}$.

故选：A .

2.【答案】 C

【解析】【分析】

本题考查两函数是否为同一函数，属于基础题.

逐一判断四个选项中两个函数的定义域和对应关系是否相同即可得正确选项.

【解答】

解：对于 A ： $f(x)=x$ 定义域为 R ， $g(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2$ 的定义域为 $\{x|x\geqslant 0\}$ ，定义域不同不是同一函数，故选项 A 不正确；

对于 B ： $f(x)=x^2$ 与 $g(x)=(x+1)^2$ 对应关系不一致，不是同一函数，故选项 B 不正确；

对于 C ： $f(x)=\sqrt{x^2}=|x|$ 定义域为 R ， $g(x)=|x|$ 定义域为 R ，两个函数的定义域和对应关系都相同，所以是同一函数，故选项 C 正确；

对于 D：由 $\begin{cases}x+1\geqslant 0\\x-1\geqslant 0\end{cases}$ 可得 $x\geqslant 1$ ，所以 $f(x)=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}$ 定义域为 $\{x|x\geqslant 1\}$ ，

由 $x^2-1\geqslant 0$ 可得 $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1$ ，所以 $g(x)=\sqrt{x^2-1}$ 定义域为 $\{x|x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 1\}$ ，定义域不同不是同一函数，故选项 D 不正确；

故选：C .

3.【答案】 C

【解析】【分析】

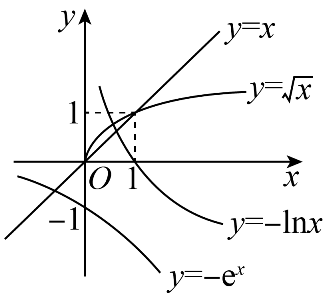
本题考查函数零点与方程根的关系，比较大小，属于中档题.

转化函数 $f(x)=x-\sqrt{x}(x>0)$ ， $g(x)=x+e^{x}$ ， $h(x)=x+\ln x(x>0)$ 的零点为 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x}(x>0)$ ， y=-e^{x} ， y=-$\ln x(x>0)$ 的交点，数形结合，即得解.

【解答】

解：函数 $f(x)=x-\sqrt{x}(x>0)$ ， $g(x)=x+e^{x}$ ， $h(x)=x+\ln x(x>0)$ 的零点，即为 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x}(x>0)$ ， y=-e^{x} ， y=-$\ln x(x>0)$ 的交点，

作出 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x}$ ， y=-e^{x} ， $y=-\ln\ x$ 的图象，



如图所示，可知 $x_2<x_3<x_1$

故选： C

4.【答案】 B

【解析】【分析】

本题考查两角和差的正弦公式，以及诱导公式的应用，正确进行角的变换是解题的关键和难点，属于基础题.

先求出 $\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)$ 和 $\cos(\frac{5\pi}{4}+\beta)$ 的值，利用

$-\sin(\alpha+\beta)=\sin(\pi+\alpha+\beta)=\sin[(\frac{5\pi}{4}+\beta\ )-(\frac{\pi}{4}-\alpha\ )]$，即可求出 $\sin(\alpha+\beta)$ 的值.

【解答】

解：$\because\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{3}{5}$，$\sin(\frac{5\pi}{4}+\beta)=-\frac{12}{13}$，$\alpha\in(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$，$\beta\in(0,\frac{\pi}{4})$，

$\therefore-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}-\alpha<0$，$\frac{5\pi}{4}<\frac{5\pi}{4}+\beta<\frac{3\pi}{2}$，$\therefore\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha\ )=-\frac{4}{5}$，$\cos(\frac{5\pi}{4}+\beta\ )=-\frac{5}{13}$，

$\therefore\sin[(\frac{5\pi}{4}+\beta\ )-(\frac{\pi}{4}-\alpha\ )]=\sin(\ \frac{5\pi}{4}+\beta)\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)-\cos(\frac{5\pi}{4}+\beta\ )\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha\ )$

$=(-\frac{12}{13})\times\frac{3}{5}-(-\frac{5}{13})\times(-\frac{4}{5})=-\frac{56}{65}=\sin(\pi+\alpha+\beta)=-\sin(\alpha+\beta)$.

$\therefore\sin(\alpha+\beta)=\frac{56}{65}$.

故本题选 B.

5.【答案】 A

【解析】【分析】

本题主要考查了基本不等式在最值求解中的应用，属于中档题．

将 $4x+3y=4$ 变形为含 $2x+1$ 和 $3y+2$ 的等式，即 $2(2x+1)+(3y+2)=8$，再将式子换元，由基本不等式换“1”法求解即可．

【解答】

解：由正实数 x，y 满足 $4x+3y=4$，可得 $2(2x+1)+(3y+2)=8$，

令 $a=2x+1$，$b=3y+2$，可得 $2a+b=8$，

所以 $\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{3y+2}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\times(\frac{2a+b}{8})=\frac{1}{8}\times(2+\frac{2a}{b}+\frac{b}{a}+1)$

$\geqslant\frac{1}{8}\times(3+2\sqrt{\frac{2a}{b}\times\frac{b}{a}})=\frac{3}{8}+\frac{\sqrt{2}}{4}$，当且仅当 $\frac{2a}{b}=\frac{b}{a}$，即 $a=4(2-\sqrt{2}),b=8(\sqrt{2}-1)$ 时取等号．

故 $\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{3y+2}$ 的最小值为 $\frac{3}{8}+\frac{\sqrt{2}}{4}$．

故本题选 A．

6.【答案】 D

【解析】【分析】

本题考查了特征数的求解，解题的关键是掌握均值的计算公式以及方差的计算公式，考查了运算能力，属于基础题．

利用均值的计算公式以及方差的计算公式求解即可．

【解答】

解：由题意，总体的均值为 $\frac{400}{1000}\times7.5+\frac{600}{1000}\times7=7.2$，

根据分层抽样的性质，则总体的方差为：

$\frac{400}{1000}\times[1+(7.5-7.2)^2]+\frac{600}{1000}\times[0.5+(7.2-7)^2]=0.436+0.324=0.76$．

故选：D．

7.【答案】 A

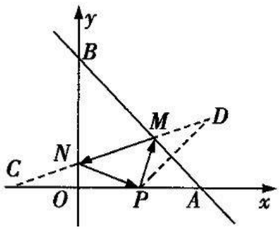
【解析】【分析】

本题主要考查了点关于直线对称的点的求法，两点间距离公式，属于拔高题．

由题意作出点 P 关于直线 OB 的对称点 C，作出点 P 关于直线 AB 的对称点 D，则 $|PM|+|NM|+|NP|=|CD|$ 而求得．

【解答】

解：



作出点P关于直线OB的对称点C，作出点P关于直线AB的对称点D，

则N，M，D三点共线，N，M，C三点共线，即N，M，D，C四点共线，

得$|PM|+|NM|+|NP|=|CD|$，

易得$C(-2,0)$，$P(2,0)$，直线AB的方程是$x+y-4=0$，设$D(m,n)$，

则$\begin{cases} \dfrac{n-0}{m-2}=1 \\ \dfrac{m+2}{2}+\dfrac{n+0}{2}-4=0 \end{cases}$ 得$\begin{cases} m=4 \\ n=2 \end{cases}$，

即$D(4,2)$，

$\therefore |CD|=\sqrt{(4+2)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{10}$．

故选A.

8.【答案】D

【解析】【分析】

本题考查空间向量共面定理，由空间向量基本定理，用$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$表示$\overrightarrow{OM}$，由$D$，$E$，$F$，$M$四点共面，可得存在实数$\lambda,\mu$，使$\overrightarrow{DM}=\lambda\overrightarrow{DE}+\mu\overrightarrow{DF}$，再转化为$\overrightarrow{OM}=(1-\lambda-\mu)k\overrightarrow{OA}+\lambda m\overrightarrow{OB}+\mu n\overrightarrow{OC}$，由空间向量分解的唯一性，分析即得解.

【解答】

解：由题意可知，$\overrightarrow{OM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OG}=\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG})=\dfrac{2}{3}\left[\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\right]$

$=\dfrac{2}{3}\left[\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\right]=\dfrac{2}{9}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{9}\overrightarrow{OB}+\dfrac{2}{9}\overrightarrow{OC}$

因为D，E，F，M四点共面，所以存在实数λ,μ，使$\overrightarrow{DM}=\lambda\overrightarrow{DE}+\mu\overrightarrow{DF}$，

所以$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OD}=\lambda(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OD})+\mu(\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OD})$，

所以$\overrightarrow{OM}=(1-\lambda-\mu)\overrightarrow{OD}+\lambda\overrightarrow{OE}+\mu\overrightarrow{OF}=(1-\lambda-\mu)k\overrightarrow{OA}+\lambda m\overrightarrow{OB}+\mu n\overrightarrow{OC}$，

所以$\begin{cases}(1-\lambda-\mu)k=\dfrac{2}{9}\\ \lambda m=\dfrac{2}{9}\\ \mu n=\dfrac{2}{9}\end{cases}$，

所以$\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{9}{2}(1-\lambda-\mu)+\dfrac{9}{2}\lambda+\dfrac{9}{2}\mu=\dfrac{9}{2}$.

故选：D

9.【答案】ACD

【解析】【分析】

本题考查了百分位数、平均数、众数和方差，是中档题.

根据百分位数、平均数、众数和方差概念和计算方式逐一判定即可.

【解答】

解：这10天$PM2.5$日均值(单位：$\mu g/m^3$)从小到大为30，32，32，32，34，36，36，38，42，88，所以众数为32，故A正确；

因为第80百分位数为$\dfrac{38+42}{2}=40$，所以B错误；

因为平均数为$\dfrac{30+32+32+32+34+36+36+38+42+88}{10}=40$，所以$C$正确；

因为前4天的均值为$\dfrac{36+32+38+34}{4}=35$，所以前4天的方差为$\dfrac{1+9+9+1}{4}=5$，

因为后4天的均值为$\dfrac{42+36+30+32}{4}=35$，所以后4天的方差为$\dfrac{49+1+25+9}{4}=21$，故$D$正确.

10.【答案】BCD

【解析】【分析】

本题考查函数性质的综合应用，涉及函数过定点，函数的奇偶性、单调性，对数不等式，属于中档题.

令$2x-1=1$，解得$x=1$，函数经过定点$(1,-1)$，判断A错误；根据函数的奇偶性，求出当$x>0$时，$f(x)$的解析式，判断B正确；根据对数函数的单调性解不等式，判断C正确；构造函数$f(x)=2^{-x}-lnx$，可知$f(x)$在$(0,+\infty)$上是减函数，根据减函数的性质判断D正确.

【解答】解：A.令$2x-1=1$，解得$x=1$，所以函数经过定点$(1,-1)$，故A错误；

B.当$x>0$时，$-x<0$，由条件可知$f(x)=f(-x)=-x(-x+1)=x(x-1)$，

则 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=\begin{cases}x(x+1),x\leqslant 0,\\ x(x-1),x>0\end{cases}=x^2-|x|$，故 B 正确；

C.当 $a>1$ 时，若 $\log_a\frac{1}{2}>1=log_a a$，解得 $0<a<\frac{1}{2}$，所以 a 的值不存在；

当 $0<a<1$ 时，若 $\log_a\frac{1}{2}>1=log_a a$，解得 $a>\frac{1}{2}$，所以 $1>a>\frac{1}{2}$；

综上可知 a 的取值范围是 $(\frac{1}{2},1)$，故 C 正确；

D.构造函数 $f(x)=2^{-x}-lnx$，由指对数函数的单调性可知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，

又 $2^{-x}-2^{y}>\ln x-\ln(-y)(x>0,y<0)$，

即 $2^{-x}-\ln x>2^{-(-y)}-\ln(-y)$，

所以 $f(x)>f(-y)$，

所以 $x<-y$，即 $x+y<0$，故 D 正确.

故答案为 BCD.

11.【答案】AD

【解析】【分析】

由圆的方程求得圆的半径判断 A；由直线 $2x-y+2=0$ 不恒过圆 C_k 的圆心，判断 B；求出圆心 $(2k-1,k)$ 到直线 $2x-3y+1=0$ 的距离，判断 C；求出满足题设的 k 值判断 D.

本题考查圆的方程，考查直线与圆位置关系的应用，考查运算求解能力，是较难题.

【解答】

解：圆 C_k：$(x-2k+1)^2+(y-k)^2=1$，可得圆心坐标为 C_k：$(2k-1,k)$，半径为 1，故 A 正确；

把 $(2k-1,k)$ 代入 $2x-y+2=0$，得 $2(2k-1)-k+2=3k=0$ 不恒成立，即直线 $2x-y+2=0$ 不恒过圆 C_k 的圆心，故 B 错误；

圆心 $(2k-1,k)$ 到直线 $2x-3y+1=0$ 的距离 $d=\frac{|2(2k-1)-3k+1|}{\sqrt{13}}=\frac{|k-1|}{\sqrt{13}}$ 不是定值，而圆的半径为定值，

则直线 $2x-3y+1=0$ 被圆 C_k 截得的弦长不相等，故 C 错误；

若存在一个圆 C_k 与 x 轴和 y 轴均相切，则 $|2k-1|=|k|=1$，解得 $k=1$，满足条件，故 D 正确.

故选：AD.

12.【答案】AB

【解析】【分析】

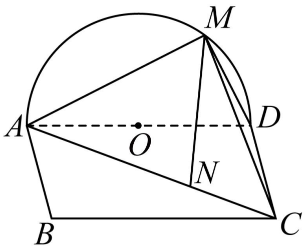
本题考查立体几何中的动点问题的求解，考查直线与平面所成角的向量求法，面面垂直的判定，线面垂直的性质，属于较难题.

根据直线与平面所成角的向量求法，面面垂直的判定，线面垂直的性质对四个选项逐一判断即可.

【解答】

解：对于A，$\because AD$ 为直径，$\therefore AM\perp DM$，

$\because$ 半圆面 $O\perp$ 平面 $ABCD$，半圆面 $O\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$CD\perp AD$，$CD\subset$ 平面 $ABCD$，

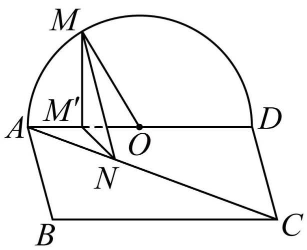


$\therefore CD\perp$ 半圆面 O，又 $AM\subset$ 半圆面 O，$\therefore CD\perp AM$，

又 $CD\cap DM=D$，$CD,DM\subset$ 平面 CMD，$\therefore AM\perp$ 平面 CMD，

$\because AM\subset$ 平面 CMA，$\therefore$ 平面 $CMA\perp$ 平面 CMD，A 正确；

对于B，如图，



令 $\angle MOD=\theta(0<\theta<\pi)$，过$M$ 作 $MM'\perp AD$ 于点 M'，连接 NM'，

若 $NM'\perp AD$，因为$MM'\cap NM'=M'$，$MM',NM'\subset$平面$MM'N$，

则 $AD\perp$ 平面$MM'N$，又$MN\subset$平面$MM'N$，

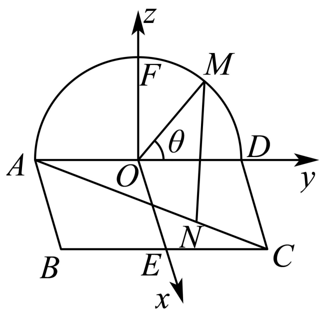
则 $AD\perp MN$，此时$MM'=\sin\theta$，$OM'=|\cos\theta|$，

由 $NM'//DC$ 得：$\dfrac{AM'}{AD}=\dfrac{NM'}{CD}$，$\therefore NM'=\dfrac{1+\cos\ \theta}{2}$，

$\because MM'^2+NM'^2=1$，$\therefore (\sin\theta)^2+\left(\dfrac{1+\cos\theta}{2}\right)^2=1$，解得：$\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$，

$\therefore$ 存在 M,N 使得 $AD\perp MN$，B 正确；

对于C，如下图，取BC 的中点E，取半圆弧的中点F，以O为原点，分别以 OE,OD,OF 为 x,y,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系.



$O(0,0,0),A(0,-1,0),C(1,1,0)$ ，

设 $\angle MOD=\theta$ ，则 $M(0,\cos\theta,\sin\theta)$ ，设 $\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{AC}$ $(0<\lambda<1)$ ，

则 $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{AC}=(\lambda,2\lambda-1,0)$ ， $N(\lambda,2\lambda-1,0)$ ，

又 $MN=1$ ，

所以 $\lambda^2+(2\lambda-1-\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2=1$ ，可得 $5\lambda^2-4\lambda+1=2(2\lambda-1)\cos\theta$ ，

当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，显然等式不成立，则 $\lambda\neq\dfrac{1}{2}$ ，

则 $2\cos\theta=\dfrac{5\lambda^2-4\lambda+1}{2\lambda-1}$ ，

因为 $\theta\in(0,\pi),2\cos\theta\in(-2,2)$ ，

则 $-2<\dfrac{5\lambda^2-4\lambda+1}{2\lambda-1}<2$ ，即 $\begin{cases}\dfrac{5\lambda^2-1}{2\lambda-1}>0\\ \dfrac{5\lambda^2-8\lambda+3}{2\lambda-1}<0\end{cases}$ ，

又 $0<\lambda<1$ 且 $\lambda\neq\dfrac{1}{2}$ ，所以 $\lambda\in\left(0,\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)\cup\left(\dfrac{3}{5},1\right)$ ，

又 $\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{AC},AC=\sqrt{5}$ ，

所以 N 点在 AC 上的轨迹为 $1+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ ，故 C 错误.

对于 D ，设直线 MN 与平面 $ABCD$ 所成角为 α ，

平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\overrightarrow{n}=(0,0,1)$ ， $\overrightarrow{MN}=(\lambda,2\lambda-1-\cos\theta,-\sin\theta)$ ，

则 $\sin\alpha=\left|\dfrac{\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\cdot|\overrightarrow{n}|}\right|=|\sin\theta|$ ，

由 C 可得 $2\cos\ \theta=\dfrac{5\lambda^2-4\lambda+1}{2\lambda-1}$ ，

令 $t=2\lambda-1$ ，由 $\lambda\in\left(0,\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)\cup\left(\dfrac{3}{5},1\right)$ 可得 $t\in\left(-1,\dfrac{2\sqrt{5}}{5}-1\right)\cup\left(\dfrac{1}{5},1\right)$,

$\dfrac{5\lambda^2-4\lambda+1}{2\lambda-1}=\dfrac{\frac{5}{4}(t+1)^2-2(t+1)+1}{t}=\dfrac{5}{4}t+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4t}\in(-2,\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}]\cup[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},2)$ ，

则 $2\cos\theta\in\left(-2,\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},2\right)$ ，

$(\sin\ \alpha)_{\max}=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}=\sqrt{1-\dfrac{6-2\sqrt{5}}{16}}=\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ ，D 错误.

故选：AB .

13.【答案】$[\frac{3}{4},\frac{4}{3})$

【解析】【分析】

本题考查交集及其运算，熟练掌握交集的定义是解本题的关键.

求出 A 中不等式的解集确定出 A ，由 A 与 B 交集中恰有一个整数，求出 a 的范围即可.

【解答】

解：由 A 中不等式变形得：$(x-1)(x+3)>0$,

解得 $x<-3$ 或 $x>1$,

即 $A=\{x|x<-3$ 或 $x>1\}$,

函数 $y=f(x)=x^2-2ax-1$ 的对称轴为 $x=a>0$,

$f(-3)=6a+8>0$,

由对称性可得，要使 $A\cap B$ 恰有一个整数，

即这个整数解为 2 ,

$\therefore f(2)\leqslant 0$ 且 $f(3)>0$,

即 $\begin{cases}4-4a-1\leqslant 0\\9-6a-1>0\end{cases}$,

解得：$\begin{cases}a\geqslant\dfrac{3}{4}\\a<\dfrac{4}{3}\end{cases}$ ，即 $\dfrac{3}{4}\leqslant a<\dfrac{4}{3}$,

则 a 的取值范围为 $[\frac{3}{4},\frac{4}{3})$.

故答案为$[\frac{3}{4},\frac{4}{3})$.

14.【答案】$(\frac{3}{2},3]$

【解析】【分析】

本题考查正弦型函数的零点。

先解方程 $f(x)+\sqrt{2}=0$ ，然后根据x 的范围，得到 $\omega x+\frac{\pi}{4}$ 的范围，再结合方程有两个不同的根，列不等式即可.

【解答】

解： $f(x)+\sqrt{2}=0$ ，即： $2\sin(\omega x+\frac{\pi}{4})+\sqrt{2}=0$ ，

$\sin(\omega x+\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

$\omega x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ 或 $\omega x+\frac{\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ ，

当 $k=0$ 时， $-\frac{\pi}{4}+2k\pi=-\frac{\pi}{4}$ ， $-\frac{3\pi}{4}+2k\pi=-\frac{3\pi}{4}$ ；

当 $k=1$ 时， $-\frac{\pi}{4}+2k\pi=\frac{7\pi}{4}$ ， $-\frac{3\pi}{4}+2k\pi=\frac{5\pi}{4}$ ；

当 $k=2$ 时， $-\frac{\pi}{4}+2k\pi=\frac{15\pi}{4}$ ， $-\frac{3\pi}{4}+2k\pi=\frac{13\pi}{4}$ ；

在区间 $(0,\pi)$ 上， $\frac{\pi}{4}<\omega x+\frac{\pi}{4}<\pi\omega+\frac{\pi}{4}$ ，

两个不同的x 使得 $f(x)+\sqrt{2}=0$ 成立，

$\frac{7\pi}{4}<\pi\omega+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{13\pi}{4}$ ，

$\frac{3}{2}<\omega\leqslant 3$ ，

故答案为： $(\frac{3}{2},3]$

15.【答案】$\frac{19}{20}$

【解析】【分析】

本题考查了相互独立事件的概率乘法公式以及对立事件的概率公式的应用，考查了逻辑推理能力，属于基础题.

先利用相互独立事件的概率乘法公式求出甲和乙都未获奖的概率，然后由对立事件的概率公式求解即可.

【解答】解：甲乙两人都未获奖的概率为$P_1=(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{2})\times(1-\frac{1}{5}-\frac{3}{5})=\frac{1}{20}$，

所以甲乙两人至少有1人获奖的概率为$P=1-P_1=1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}$.

故答案为$\frac{19}{20}$.

16.【答案】①②

【解析】【分析】

本题考查命题的真假的判断与应用，考查轨迹方程的求法，向量的应用，考查分析问题解决问题的能力，是较难题.

利用已知条件判断两条直线的位置关系判断①；在$\triangle MNP$中，设$\angle PMN=\theta$，表示出$|PM|+|PN|$，利用三角函数的最值判断②；求出P的轨迹，判断③；推出轨迹，利用向量的平行四边形法则，求解$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$的最小值判断选项④.

【解答】

解：直线l_1：$x+my-3m-1=0$与l_2：$mx-y-3m+1=0$满足$1\cdot m+m\cdot(-1)=0$，

故l_1一定垂直l_2，所以①正确；

l_1过定点$M(1,3)$，l_2过定点$N(3,1)$，

在$Rt\triangle MNP$中，设$\angle PMN=\theta$，

$|MN|=\sqrt{(3-1)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{2}$，

则$|PM|+|PN|=2\sqrt{2}cos\theta+2\sqrt{2}sin\theta=4sin(\theta+\frac{\pi}{4})\leqslant 4$，当$\theta=\frac{\pi}{4}$时等号成立，

所以②正确；

由$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=0$，可得点$P$轨迹方程为$(x-2)^2+(y-2)^2=2$(除去$M$，$N$，$(3,3)$三个点)，

所以③不正确；

作$CD\perp AB$，则$|CD|=\sqrt{2}$，

$\therefore$点D轨迹方程为$(x+1)^2+(y+1)^2=2$.

$\because|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=2|\overrightarrow{PD}|$，$|\overrightarrow{PD}|$的最小值为$\sqrt{2}$，

$\therefore|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$的最小值为$2\sqrt{2}$，所以④不正确.

故答案为：①②.

17.【答案】解：(1) 因为 $f(x)=\log_2(4^x+1)+ax$ 是偶函数，

所以 $f(-x)=f(x)$，即 $\log_2\left(4^{-x}+1\right)-ax=\log_2(4^x+1)+ax$，

所以 $2ax+\log_2(4^x+1)-\log_2\left(4^{-x}+1\right)=0$，

其中

$\log_2(4^x+1)-\log_2(4^{-x}+1)=\log_2\dfrac{4^x+1}{4^{-x}+1}$

$=\log_2\dfrac{(4^x+1)\cdot 4^x}{(4^{-x}+1)\cdot 4^x}=\log_2\dfrac{(4^x+1)\cdot 4^x}{4^x+1}=\log_2 4^x=2x$，

$\therefore 2ax+2x=0$，解得：$a=-1$.

(2) 由 (1) 得 $f(x)=\log_2(4^x+1)-x$，

$\therefore 2^{f(x)}=2^{\log_2(4^x+1)-x}=\dfrac{4^x+1}{2^x}=2^x+2^{-x}$，

故函数 $g(x)=2^{2x}+2^{-2x}+m(2^x+2^{-x})$ 的最小值为 -3，

令 $2^x+2^{-x}=t\geqslant 2$，当且仅当 $x=0$ 等号成立，

故 $h(t)=t^2+mt-2(t\geqslant 2)$ 的最小值为 -3，

等价于 $\begin{cases}-\dfrac{m}{2}\leqslant 2\\ h(2)=2m+2=-3\end{cases}$，解得：$m=-\dfrac{5}{2}$，

或 $\begin{cases}-\dfrac{m}{2}>2\\ h(-\dfrac{m}{2})=-\dfrac{m^2}{4}-2=-3\end{cases}$，无解，

综上：$m=-\dfrac{5}{2}$.

【解析】本题考查了复合函数的奇偶性、已知函数最值求参数的取值，属于中档题.

(1) 利用偶函数满足 $f(-x)=f(x)$，求出 a 的值；

(2) 先化简得 $g(x)=2^{2x}+2^{-2x}+m(2^x+2^{-x})$，令 $2^x+2^{-x}=t\geqslant 2$，得 $h(t)=t^2+mt-2(t\geqslant 2)$，然后利用二次函数的性质，求 m 的值即可.

18.【答案】解：(1) $\because \dfrac{1-sinA}{cosA}=\dfrac{1-cos2B}{sin2B}$，

$\therefore \dfrac{1-sinA}{cosA}=\dfrac{2sin^2B}{2sinBcosB}=\dfrac{sinB}{cosB}$，即 $cosB=cosAsinB+sinAcosB=\sin(A+B)=sinC$，

$\therefore sinC=\sin(\dfrac{\pi}{2}-B)$，

$\therefore C=\dfrac{\pi}{2}-B+2k\pi$，$k\in Z$ 或 $C+\dfrac{\pi}{2}-B=\pi+2k\pi$，$k\in Z$，即 $C+B=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ 或

$C-B=\frac{\pi}{2}+2k\pi$， $k\in Z$，

$\therefore$ 当 $C+B=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$ 时，由于 $C+B\in(0,\pi)$，则 $C+B=\frac{\pi}{2}$，即 $A=\frac{\pi}{2}$，此时 $cosA=0$

不符合题意，故舍去；

当 $C-B=\frac{\pi}{2}+2k\pi$， $k\in Z$ 时，由于 $C-B\in(-\pi,\pi)$， 则 $C-B=\frac{\pi}{2}$；

(2) 由 (1) 得 $sinB=-cosC>0$， 则 $\frac{\pi}{2}<C<\pi$， $0<B<\frac{\pi}{2}$，

又 $C=\frac{\pi}{2}+B$， 即 $A=\frac{\pi}{2}-2B$，

则由正弦定理得 $\frac{a^2+b^2}{r^2\sin^2C}=\frac{4r^2(\sin^2A+\sin^2B)}{r^2\sin^2C}$

$=\frac{4(\cos^2 2B+1-\cos^2B)}{\cos^2B}$

$=\frac{4[(2cos^2B-1)^2+1-\cos^2B]}{\cos^2B}$

$=4(4cos^2B+\frac{2}{\cos^2B}-5)$

$\geqslant 4(2\sqrt{8}-5)=16\sqrt{2}-20$，

当且仅当 $4cos^2B=\frac{2}{\cos^2B}$， 即 $\cos^2B=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立，

$\therefore \frac{a^2+b^2}{r^2\sin^2C}$ 的最小值为 $16\sqrt{2}-20$．

【解析】本题考查解三角形，考查转化思想，考查逻辑推理能力和运算能力，属于中档题．

(1) 利用三角函数恒等变形公式得 $\frac{1-sinA}{cosA}=\frac{2sin^2B}{2sinBcosB}=\frac{sinB}{cosB}$， 即

$cosB=cosAsinB+sinAcosB=\sin(A+B)=sinC$， 即 $sinC=\sin(\frac{\pi}{2}-B)$， 利用正弦函数的

性质，即可得出答案；

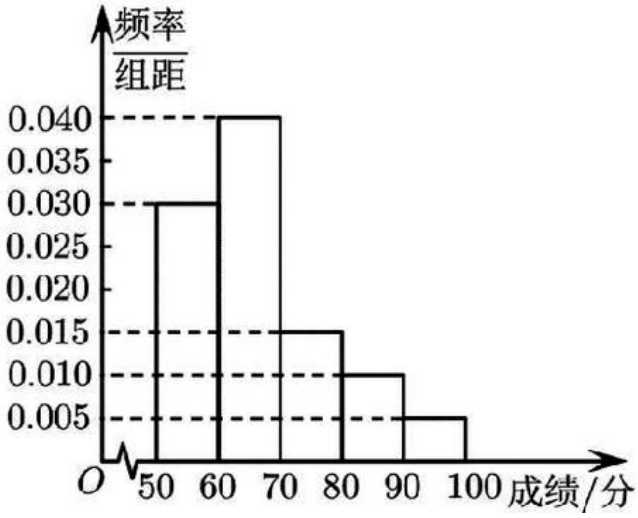
(2) 由 (1) 得 $sinB=-cosC>0$， 则 $\frac{\pi}{2}<C<\pi$， $0<B<\frac{\pi}{2}$， 由正弦定理得

$\frac{a^2+b^2}{r^2\sin^2C}=\frac{4r^2(\sin^2A+\sin^2B)}{r^2\sin^2C}=\frac{4(\cos^2 2B+1-\cos^2B)}{\cos^2B}=\frac{4[(2cos^2B-1)^2+1-\cos^2B]}{\cos^2B}=4(4cos^2B+\frac{2}{\cos^2B}-$

，利用基本不等式，即可得出答案．

19.【答案】解： (1) 成绩落在 $[60,70)$ 的频率为 $1-(0.30+0.15+0.10+0.05)=0.40$，

补全的频率分布直方图，如图



样本的平均数 $\overline{x}=55\times0.30+65\times0.40+75\times0.15+85\times0.10+95\times0.05=67$，

设 80% 分位数为 x，则 $0.03\times10+0.04\times10+(x-70)x0.015=0.8$，

解得：$x=\dfrac{230}{3}\approx76.67$，

即这 1000 名学生成绩的平均数为 67， 80% 分位数为 76.67;

(2) 由分层抽样可知，第三组和第四组分别抽取 30 人和 20 人，

这 200 人中分数在区间 $[70,90)$ 所有人的成绩平均值：$\overline{x_1}=\dfrac{3}{5}\times72+\dfrac{2}{5}\times87=78$，

这 200 人中分数在区间 $[70,90)$ 所有人的成绩方差：

$s^2=\dfrac{3}{5}[1+(72-78)^2]+\dfrac{2}{5}[2+(87-78)^2]=\dfrac{277}{5}=55.4$，

所以，这 200 人中分数在区间 $[70,90)$ 所有人的成绩的方差为 55.4.

【解析】本题考查了利用频率分布直方图估计平均数和百分位数、求分层随机抽样中的均值与方差，属中档题.

20.【答案】解：(1) 设圆心的坐标为 $(t,t+1)$，

则有 $(t-1)^2+(t+1)^2=(t+1)^2+(t+3)^2$，

整理求得 $t=-1$，

故圆心为 $(-1,0)$，半径 r 满足 $r^2=(t-1)^2+(t+1)^2=4$，

则圆的方程为 $(x+1)^2+y^2=4$.

(2) 设线段 PD 中点 $M(x,y)$， $P(x_1,y_1)$，

由 $D(4,3)$ 知：$x_1=2x-4$， $y_1=2y-3$，

$\because$ 点 P 在圆 $(x+1)^2+y^2=4$ 上运动，

$\therefore (2x-4+1)^2+(2y-3)^2=4$，

$\therefore M$ 的轨迹方程为 $(x-\dfrac{3}{2})^2+(y-\dfrac{3}{2})^2=1$．

【解析】本题考查线段的中点的轨迹方程的求法，考查代入法的运用，确定坐标之间的关系是关键，为中档题．

(1) 设出圆心的坐标，利用半径相等求得 t，进而利用两点的距离公式求得半径，则圆的方程可得．

(2) 线段 PD 中点 $M(x,y)$，$C(x_1,y_1)$，由题意知 $x_1=2x-4$，$y_1=2y-3$，由点 P 在圆 $(x+1)^2+y^2=4$ 上运动，能求出点 M 的轨迹方程．

21.【答案】解：(1) 证明：$\because AA_1\perp$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC，

$\therefore AA_1\perp BC$，

$\because AB=2\sqrt{3}$，$AC=4$，$BC=2$，

$\therefore AB^2+BC^2=16=AC^2$，

$\therefore AB\perp BC$，

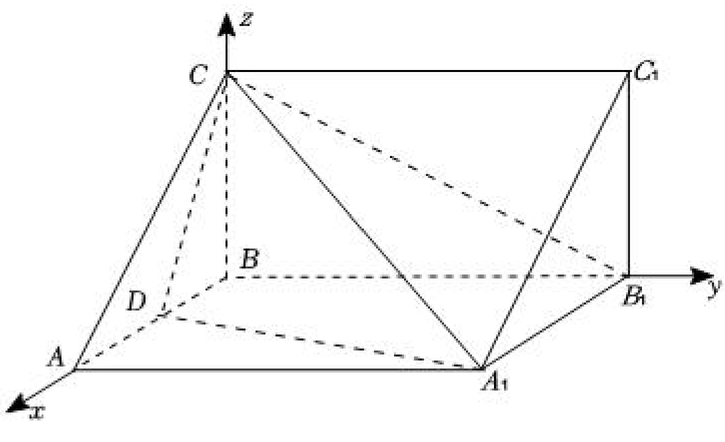
又 $AA_1\cap AB=A$，$AA_1\subset$ 平面 AA_1B_1B，$AB\subset$ 平面 AA_1B_1B，

$\therefore BC\perp$ 平面 AA_1B_1B，

又 $DA_1\subset$ 平面 AA_1B_1B，

$\therefore BC\perp A_1D$；

(2) 由 (1) 可建立以 B 为原点，以 BA、BB_1、BC 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系 $B-xyz$，如图所示：



$AB=2\sqrt{3}$，$AC=BB_1=2BC=4$，则 $B(0,0,0)$，$A(2\sqrt{3},0,0)$，$C(0,0,2)$，$A_1(2\sqrt{3},4,0)$，

$B_1(0,4,0)$， $D(\sqrt{3},0,0)$，

设平面 B_1A_1C 的一个法向量为 $\overrightarrow{m}=(x,y,z)$，且 $\overrightarrow{B_1A_1}=(2\sqrt{3},0,0)$， $\overrightarrow{B_1C}=(0,-4,2)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{B_1A_1}=0\\ \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{B_1C}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}2\sqrt{3}x=0\\ -4y+2z=0\end{cases}$，取 $z=2$，则 $y=1$， $x=0$，

$\therefore$ 平面 B_1A_1C 的一个法向量为 $\overrightarrow{m}=(0,1,2)$，

设平面 A_1CD 的一个法向量为 $\overrightarrow{n}=(x,y,z)$，且 $\overrightarrow{DA_1}=(\sqrt{3},4,0)$， $\overrightarrow{DC}=(-\sqrt{3},0,2)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{DA_1}=0\\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\sqrt{3}x+4y=0\\ -\sqrt{3}x+2z=0\end{cases}$，取 $x=\sqrt{3}$，则 $y=-\frac{3}{4}$， $z=\frac{3}{2}$，

$\therefore$ 平面 A_1CD 的一个法向量为 $\overrightarrow{n}=(\sqrt{3},-\frac{3}{4},\frac{3}{2})$，

设平面 B_1A_1C 与平面 A_1CD 夹角为 θ，由图形可得 θ 为锐角，

则 $cos\theta=|\cos<\overrightarrow{n}，\overrightarrow{m}>|=\frac{|\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{m}|\cdot|\overrightarrow{n}|}=\frac{\frac{9}{4}}{\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{93}}{4}}=\frac{3\sqrt{465}}{155}$，

故平面 B_1A_1C 与平面 A_1CD 夹角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{465}}{155}$.

【解析】本题考查二面角和空间向量的应用，考查数形结合思想和转化思想，考查逻辑推理能力和运算能力、直观想象，属于中档题.

(1) 根据线面垂直的性质和判定定理，即可证明结论;

(2) 由 (1) 可建立以 B 为原点，以 BA、BB_1、BC 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系 $B-xyz$，分别求出平面 B_1A_1C 与平面 A_1CD 的法向量，利用向量的坐标运算，即可得出答案.

22.【答案】解：①圆 C： $(x+3)^2+(y-1)^2=7$ 的圆心 $C(-3,1)$，连接 OC.

则 $AC\perp AO$， $OB\perp BC$.

$\therefore$ 以 OC 为直径的圆 $(x+\frac{3}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2$ 经过点 A， B，即 AB 为两圆的公共弦.

把两圆的方程相减可得 $3x-y+3=0$，即直线 AB 的方程为 $3x-y+3=0$.

② 根据题意，点 P 为直线 $x-y-2=0$ 上一动点，则设 $P(2+m,m)$，

$\because PA$， PB 是圆 C 的切线，

$\therefore CA\perp PA$， $CB\perp PB$，

$\therefore AB$ 是圆 C 与以 PC 为直径的圆的公共弦，

可得以 PC 为直径的圆的方程为 $(x+3)(x-2-m)+(y-1)(y-m)=0$，

把两圆的方程相减可得直线 AB 的方程为：$(m+5)x+(m-1)y+2m+9=0$，

即 $m(x+y+2)+(5x-y+9)=0$，

则 $\begin{cases} x+y+2=0 \\ 5x-y+9=0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=-\dfrac{11}{6} \\ y=-\dfrac{1}{6} \end{cases}$.

所以直线 AB 过定点 $\left(-\dfrac{11}{6},-\dfrac{1}{6}\right)$.

【解析】本题考查了直线和圆的位置关系，圆和圆的位置关系，圆的切线性质，以及直线过定点问题.

①求出圆心 C 的坐标，写出以 OC 为直径的圆，然后把该圆的方程与已知方程相减可得 AB 的方程；

②根据题意，设 $P(2+m,m)$，分析可得 AB 是圆 C 与以 PC 为直径的圆的公共弦，据此可得以 PC 为直径的圆的方程，又由圆 C 的方程，分析可得直线 AB 的方程，变形可得答案.